INTRODUZIONE AI CIRCUITI

La teoria da sapere per il c.d.l. Ingegneria Informatica (6 cfu).

PROFF. ALBANESE R., DE MAGISTRIS M.

Redatto da Claudio S. Di Mauro - N46001636

LEGGI DI KIRCHHOFF

Le leggi di Kirchhoff descrivono le relazioni tra le intensità di corrente e le tensioni dei diversi bipoli in un circuito. Esse dipendono solo dal modo in cui i componenti sono collegati tra loro.

I componenti e i bipoli, in un circuito, sono collegati tra loro attraverso giunzioni dette *nodi*. Sul circuito è possibile individuare dei percorsi lungo i bipoli; in particolare, i percorsi chiusi, cioè quelli per i quali partendo da un nodo vi si ritorna, vengono detti *maglie*.

LEGGE DI KIRCHHOFF PER LE CORRENTI

La legge di Kirchhoff per le correnti governa le intensità di corrente nei bipoli che incidono in uno stesso nodo.

In condizioni stazionarie, questa legge è esprimibile mediante la formula

$$\sum_k (\pm) i_k = 0$$

dove i_k indica l'intensità di corrente del k-esimo bipolo che incide nel nodo. L'intensità di corrente i_k deve essere sommata col proprio segno ($+i_k$) se il verso di riferimento scelto è uscente dal nodo, con segno opposto ($-i_k$) in caso contrario.

Legge di Kirchhoff per le correnti (LKC):

"la somma delle intensità di corrente dei bipoli incidenti in un qualsiasi nodo è uguale a zero, istante per istante."

$$\sum_k (\pm) i_k(t) = 0$$

LEGGE DI KIRCHHOFF PER LE TENSIONI

La legge di Kirchhoff per le tensioni governa le tensioni dei bipoli che appartengono ad una stessa maglia.

In condizioni stazionarie, questa legge è esprimibile mediante la formula

$$\sum_h (\pm) v_h = 0$$

dove v_h è la tensione dell' h-esimo bipolo che appartiene alla maglia presa in considerazione. Per la maglia va scelto un verso di percorrenza, sia esso arbitrariamente preso in senso orario o antiorario. La tensione v_h va sommata con il proprio segno ($+v_h$) se il verso di riferimento è concorde con il verso di percorrenza scelto per la maglia e con segno opposto ($-v_h$) in caso contrartio.

Legge di Kirchhoff per le tensioni (LKT):

"la somma algebrica delle tensioni dei bipoli che formano una qualsiasi maglia è uguale a zero, istante per istante."

$$\sum_h (\pm) v_h(t) = 0$$

BIPOLI PASSIVI E BIPOLI ATTIVI

I bipoli per i quali, fatta la convenzione dell'utilizzatore, la potenza assorbita risulta sempre positiva[1] vengono detti *passivi*. In generale, considerando l'energia assorbita da un bipolo in un generico intervallo temporale, si diranno passivi anche quei bipoli che non sono in grado di erogare più energia elettrica di quanta ne abbiano immagazzinata in precedenza. Con tali definizioni, gli unici bipoli in grado di erogare energia elettrica senza limitazioni sono soltanto i generatori e sono detti *attivi*.

[1] per convenzione la potenza elettrica assorbita è positiva se il bipolo effettivamente assorbe potenza elettrica, altrimenti è negativa; sempre per convenzione la potenza elettrica erogata è positiva se effettivamente il bipolo eroga potenza elettrica, altrimenti è negativa. *La potenza elettrica assorbita dal bipolo in un generico istante è uguale alla potenza erogata in quell'istante con il segno cambiato (conservazione delle potenze).*

BIPOLI A-DINAMICI FONDAMENTALI

I bipoli si distinguono essenzialmente effettuando due classificazioni. Innanzitutto li distinguiamo in *lineari* e *non lineari.* Un bipolo si dice lineare se la relazione tra la tensione e l'intensità di corrente è lineare, altrimenti è non lineare.

Una seconda classificazione è quella che li distingue in bipoli *a-dinamici* e *dinamici*. I primi sono caratterizzati da un legame tra tensione e intensità di corrente descrivibile attraverso relazioni algebriche. Queste relazioni possono essere descritte anche in forma grafica attraverso curve che vengono dette *curve caratteristiche* e sono definite su piani corrente/tensione. I secondi, invece, sono caratterizzati da un legame tra intensità di corrente e tensione più complesso, nel quale è presente la derivata di una delle due grandezze. Questi bipoli, quando presenti, introducono equazioni differenziali ordinarie all'interno delle equazioni circuitali.

RESISTORE LINEARE

Il *resistore lineare* è un bipolo a-dinamico il cui funzionamento è descritto dalla relazione caratteristica

$$v = Ri$$

dove R è un coefficiente costante che prende il nome di *resistenza* elettrica del resistore e nel S.I. ha come unità di misura l'*ohm* (Ω).

La curva caratteristica del resistore lineare è una retta passante per l'origine. La tangente dell'angolo che questa retta forma con l'asse delle ascisse è uguale alla resistenza elettrica $R = v/i = tan\ \alpha$. Per $R \to 0$ (*corto circuito*) la retta tende a coincidere con l'asse delle ascisse, mentre per $R \to \infty$ (*circuito aperto*) essa tende a coincidere con l'asse delle ordinate.

Il resistore lineare può essere caratterizzato anche attraverso la *conduttanza*[2] G, la cui unità di misura nel S.I. è il *siemens*[3] (S), che interviene secondo la relazione

$$i = Gv\ .$$

Per quanto appena visto, risulta quindi che il resistore è un bipolo a-dinamico *controllato sia in tensione che in corrente*, cioè per ogni valore di tensione c'è un solo valore dell'intensità di corrente che verifica l'equazione caratteristica, e viceversa.

Se la costante R varia nel tempo, il resistore si dice *tempo variante*, altrimenti è detto *tempo invariante*.

Dall'equazione caratteristica possiamo ricavare la potenza assorbita dal resistore, che è data da

$$p_R^{(a)} = Ri^2 \qquad \text{ovvero} \qquad p_R^{(a)} = \frac{v^2}{R}\ .$$

GENERATORI IDEALI

Il *generatore ideale di tensione* è un bipolo a-dinamico il cui funzionamento è dato dalla relazione caratteristica

$$v = e(t)$$

dove $e(t)$ è una funzione assegnata indipendente dall'intensità di corrente del generatore.

Tale generatore è un bipolo controllato solo in corrente, cioè per ogni valore di intensità di corrente c'è un solo valore di tensione che verifica l'equazione caratteristica.

La sua curva caratteristica non è simmetrica.

Un generatore di tensione *costante* è un generatore che imprime una tensione costante: $e(t) = E$. Esso costituisce il modello ideale di sorgenti stazionarie (ad es. la pila).

Un generatore di tensione *sinusoidale* è un generatore che impone una tensione sinusoidale con una pulsazione assegnata $e(t) = E_m cos(\omega t + \varphi)$, dove E_m è l'ampiezza della tensione impressa, ω è la pulsazione e φ è la fase iniziale. Esso è il modello ideale di sorgenti sinusoidali (ad es. l'alternatore monofase).

Dalle equazioni caratteristiche è possibile ricavare la potenza erogata da un generatore ideale di tensione, che è data da

$$p_E^{(e)} = e \cdot i\ .$$

Siccome la curva caratteristica si trova nel primo e nel secondo quadrante di un piano (i, v) esistono condizioni di funzionamento in cui la potenza erogata è positiva e condizioni in cui essa è negativa.

---

[2] La conduttanza è la grandezza inversa della resistenza, in particolare rappresenta l'espressione quantitativa dell'attitudine di un conduttore ad essere percorso da corrente elettrica.

[3] Essendo la conduttanza l'inversa della resistenza, si deduce facilmente che 1S=1Ω^{-1} → $G = 1/R$

Un generatore del genere è in grado di erogare potenza al circuito per un tempo illimitato, e dunque, anche un'energia illimitata. Ciò significa che il generatore ideale di tensione è un bipolo *attivo*.

Il *generatore ideale di corrente* è un bipolo a-dinamico la cui intensità di corrente è nota e non dipende dalla tensione ai suoi terminali:

$$i = j(t)\ .$$

La curva caratteristica del generatore ideale di corrente sul piano (i, v) è una retta parallela all'asse delle ordinate v.
Questo è un bipolo controllato solo in tensione, cioè per ogni valore di tensione c'è un solo valore di intensità di corrente che verifica l'equazione caratteristica.
La potenza erogata da un generatore ideale di corrente è data da

$$p_J^{(e)} = v \cdot j\ .$$

Siccome la curva caratteristica di tale generatore si trova nel primo e nel quarto quadrante del piano (i, v) esistono condizioni di funzionamento in cui la potenza erogata ha segno positivo e condizioni per cui la potenza erogata ha segno negativo. Ciò significa che anche il generatore ideale di corrente è un bipolo *attivo*, vale a dire in grado di erogare effettivamente energia al circuito a cui è collegato senza alcun limite.

Questi due tipi di generatori vengono detti anche *indipendenti*: il primo perché ha una funzione assegnata $e(t)$ che è indipendente dall'intensità di corrente; il secondo perché ha un'intensità di corrente che è assegnata.

Un *generatore controllato lineare*, sia esso di tensione o di corrente, è un elemento con due coppie di terminali; una coppia si comporta come un generatore di tensione (o di corrente, a seconda del caso in cui ci troviamo), che, al contrario dei generatori indipendenti, è proporzionale ad una grandezza di controllo, cioè una tensione o una intensità di corrente, prelevata attraverso l'altra coppia di terminali da un elemento del circuito in cui è inserito.
I generatori controllati appartengono alla categoria dei *doppi bipoli*, che vedremo in seguito.

CORTO CIRCUITO

Il *corto circuito* (o *cortocircuito*) è un bipolo a-dinamico definito dalla relazione caratteristica

$$v = 0 \text{ (per qualsiasi valore di } i\text{)}$$

cioè per qualsiasi valore dell'intensità della corrente i la tensione è nulla.

CIRCUITO APERTO

Il *circuito aperto* è il bipolo a-dinamico definito dalla relazione caratteristica

$$i = 0 \text{ (per qualsiasi valore di } v\text{)}$$

cioè l'intensità della corrente elettrica del circuito aperto è uguale a zero per qualsiasi valore della tensione v.

Sia il corto circuito che il circuito aperto verificano la proprietà di linearità, infatti le loro curve caratteristiche sono rette passanti per l'origine; inoltre sia la potenza elettrica assorbita dal corto circuito che quella assorbita dal circuito aperto sono uguali a zero, istante per istante.

INTERRUTTORE

L'*interruttore* è un bipolo a-dinamico tempo-variante. Quando l'interruttore è *aperto* l'intensità di corrente è zero indipendentemente dal valore della tensione, mentre quando è *chiuso* la tensione è zero indipendentemente dalla corrente che in esso circola.
Essendo un bipolo tempo-variante, la sua curva caratteristica subisce delle mutazioni a seconda che esso risulti aperto o chiuso: coincide con la curva caratteristica del circuito aperto, quando è aperto; analogamente coincide con quella del corto circuito quando è chiuso.
È un bipolo lineare e la potenza elettrica assorbita è sempre uguale a zero.

GENERATORI REALI
I generatori reali, di tensione e di corrente, sono modelli idealizzati di sorgenti di energia elettrica o di segnali elettrici. Tuttavia, nella realtà la situazione è estremamente più complessa. Uno dei fenomeni che si osserva nelle sorgenti reali è la *dissipazione di energia elettrica*. Il modo più semplice per descrivere l'azione di questa dissipazione sta nel considerare un resistore in serie al generatore ideale di tensione ed uno in parallelo al generatore ideale di corrente. Questi tipi di bipoli prendono rispettivamente il nome di *generatore reale di tensione* e *generatore reale di corrente*.

RESISTORI NON LINEARI
Tutti i bipoli a-dinamici che hanno relazioni caratteristiche non lineari vengono in generale denominati *resistori non lineari*.
Un primo esempio di resistore non lineare è il *diodo a giunzione pn*. Esso è un bipolo a-dinamico in condizioni lentamente variabili; la sua curva caratteristica è abbastanza complessa: è una curva passante per l'origine, monotòna ma non simmetrica rispetto all'origine, per cui il funzionamento di un circuito in cui è inserito tale diodo cambia radicalmente se il collegamento viene realizzato scambiando i terminali.
Questo bipolo è controllato sia in tensione che in corrente, cioè per ogni valore di tensione c'è un solo valore di corrente che verifica l'equazione caratteristica, e viceversa.
Un secondo esempio è il *diodo tunnel*, un bipolo a-dinamico non lineare, la cui curva caratteristica risulta essere non monotòna. In conseguenza di ciò si ha che per ogni assegnato valore di tensione esiste un solo punto di funzionamento, mentre per un assegnato valore dell'intensità di corrente possono esistere più punti di funzionamento.
È controllato in tensione, ma non in corrente.

Un resistore di dice *controllato in tensione* se a ciascun valore della tensione corrisponde un solo punto di funzionamento; analogamente si dice che è *controllato in corrente* se a ciascun valore dell'intensità di corrente corrisponde un solo punto di funzionamento.

BIPOLI A-DINAMICI PASSIVI
Un bipolo a-dinamico, sia esso lineare o non lineare, si dice *passivo* se, fatta la convenzione dell'utilizzatore, la sua curva caratteristica risulta definita solo nel primo e nel terzo quadrante di un piano (v, i).
Un bipolo a-dinamico passivo, si dice *strettamente passivo* se la potenza elettrica assorbita è uguale a zero solo se sia l'intensità di corrente che la tensione sono uguali a zero.
I bipoli a-dinamici strettamente passivi dissipano l'energia che assorbono e dunque non sono in grado di restituirla al circuito, sotto forma di energia elettrica. Per tale motivo sono definiti elementi *dissipativi*.

BIPOLI DINAMICI FONDAMENTALI
I bipoli per i quali la relazione caratteristica è di tipo differenziale (o integrale), cioè il valore della tensione in ogni istante può dipendere anche dalla storia passata della stessa tensione e dell'intensità di corrente e viceversa, vengono detti *bipoli dinamici*.

CONDENSATORE
Il dispositivo fisico *condensatore* è un componente a due terminali, costituito da due elettrodi realizzati con materiale ad elevatissima conducibilità elettrica. Tra gli elettrodi è interposto un materiale isolante con proprietà dielettriche per incrementare la capacità. Quando agli elettrodi è applicata una tensione elettrica, su di essi si stabilisce una carica elettrica libera, che si addensa sulle superfici: le cariche sulle superfici sono uguali in modulo e con segno opposto. In condizioni lentamente variabili la carica sugli elettrodi è direttamente proporzionale alla tensione applicata se il dielettrico interposto tra gli elettrodi è lineare.
Il bipolo *condensatore lineare* è definito dalla relazione caratteristica carica-tensione:

$$Q = Cv$$

dove Q è la carica depositata sull'elettrodo connesso al terminale positivo, v è la tensione ed il coefficiente costante C è la *capacità del condensatore*. Nel S.I. l'unità di misura della capacità elettrica si misura in *farad* (F).
La sua curva caratteristica può essere rappresentata nel piano (Q, v) come una retta passante per l'origine.

Se la capacità è costante nel tempo, allora il condensatore è tempo invariante.
In accordo con la convenzione dell'utilizzatore, scelto un verso, l'intensità di corrente del condensatore è legata alla carica attraverso la relazione

$$i = \frac{dQ}{dt} \ .$$

La relazione tra la tensione e l'intensità di corrente, invece, è data da

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

che è differenziale lineare.
Un condensatore è detto *non lineare* se la relazione caratteristica tensione-carica è non lineare. Un condensatore di questo tipo può essere ottenuto, ad esempio, interponendo tra gli elettrodi un dielettrico non lineare.
La potenza assorbita da un condensatore lineare tempo invariante vale

$$p_C^{(a)} = vC\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Cv^2}{2}\right) = \frac{dw_e}{dt}$$

dove

$$w_e(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$$

e pertanto l'energia assorbita dal condensatore in un generico intervallo $(t_1\,,\ t_2)$ vale:

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{Cv^2}{2}\right)d\tau = w_e(t_2) - w_e(t_1) \quad .$$

L'energia assorbita dal condensatore non dipende dall'andamento della tensione nell'intervallo $(t_1\,,\ t_2)$, ma solo dai valori che essa assume agli estremi dello stesso. Quando la tensione all'istante iniziale è uguale a quella all'istante finale - $v(t_1\,) = v(t_2)$ - allora l'energia assorbita dal condensatore è nulla.
In un processo di questo tipo il condensatore assorbe energia durante una parte dell'intervallo $(t_1\,,\ t_2)$ ed eroga la stessa quantità di energia durante la restante parte. Un bipolo con questa proprietà è detto *conservativo*, perché l'energia che effettivamente assorbe viene immagazzinata in esso sotto forma di *energia interna*, per poi essere restituita al circuito, quando occorre. Essendo C una grandezza positiva, l'energia immagazzinata è positiva.
Pur potendo erogare energia il condensatore è un bipolo passivo perché non può erogare più energia di quanta ne abbia immagazzinata in precedenza.

INDUTTORE

Il dispositivo fisico *induttore* è un componente a due terminali costituito da alcune spire di filo conduttore con elevatissima conducibilità elettrica (considerata infinita nei modelli ideali). Le spire sono avvolte su un nucleo di ferro dolce o di ferrite per incrementare il coefficiente di autoinduzione. Quando l'induttore è attraversato da una corrente nasce un campo magnetico e, quindi, un flusso concatenato con l'avvolgimento. In condizioni di funzionamento lentamente variabili il flusso del campo magnetico concatenato con l'avvolgimento è direttamente proporzionale all'intensità della corrente dell'induttore se il materiale su cui è realizzato l'avvolgimento ha un comportamento magnetico lineare.
Il bipolo *induttore lineare* ha la relazione caratteristica definita dal prodotto corrente-flusso:

$$\Phi = Li$$

dove i è l'intensità della corrente, Φ è il flusso totale del campo magnetico concatenato con l'avvolgimento ed il coefficiente L è l'induttanza.
L'unità di misura dell'induttanza nel S.I. è l'*henry* (H).
La relazione caratteristica intensità di corrente-flusso può essere rappresentata in un piano (i, Φ) come una retta passante per l'origine.
Quando il coefficiente di autoinduzione non cambia nel tempo si dice che l'induttore è tempo-invariante.
La tensione v dell'induttore, con il verso di riferimento scelto in accordo con la convenzione dell'utilizzatore, è legata al flusso Φ attraverso la relazione

$$v = \frac{d\Phi}{dt} \quad .$$

La relazione tra tensione ed intensità di corrente dell'induttore è invece data da $v = L\frac{di}{dt}$.
La potenza assorbita da un induttore lineare tempo invariante è data dalla formula

$$p_L^{(a)} = iL\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2}\right) = \frac{dw_m}{dt}$$

dove

$$m(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)\,.$$

Allora l'energia assorbita dall'induttore in un generico intervallo temporale, $(t_1\,,\ t_2)$, vale

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \rho(\tau)\,d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{Li^2}{2}\right)d\tau = w_m(t_2) - w_m(t_1) \quad .$$

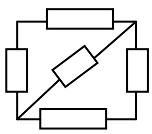
Anche l'induttore è un bipolo conservativo. L'energia assorbita dall'induttore non dipente dall'andamento della corrente nell'intervallo $(t_1\,,\ t_2)$, ma solo dai valori che essa assume agli estremi di tale intervallo, cioè $i(t_1)$ed $i(t_2)$.
Quando $L > 0$ l'induttore è un bipolo passivo.

CIRCUITO DINAMICO LINEARE

I circuiti con soli generatori e resistori vengono detti a-dinamici, nel senso che tutti questi componenti sono descritti da caratteristiche puramente algebriche. Quando un circuito contiene bipoli descritti da equazioni caratteristiche che sono di tipo differenziale, come il condensatore o l'induttore, viene detto dinamico. I circuiti che hanno un solo elemento dinamico sono detti circuiti del primo ordine. L'ordine del circuito sta ad indicare il numero di elementi dinamici presenti. Le equazioni che descrivono questi circuiti, quindi, possono facilmente essere ricondotte ad equazioni differenziali di ordine pari all'ordine del circuito.

GRAFO DI UN CIRCUITO

Le equazioni di Kirchhoff dipendono solo da come gli elementi circuitali sono connessi tra loro e non dalla loro natura; è per questo che esse vengono definite *equazioni topologiche*.



Per scrivere le equazioni di Kirchhoff per un determinato circuito è sufficiente riferirsi ad una struttura astratta che rappresenti i nodi del circuito e i collegamenti tra essi realizzati tramite i bipoli.
In figura possiamo vedere un esempio tipico di grafo, nel quale sono scomparsi tutti i bipoli particolari, infatti il grafo utilizza dei bipoli generici per poter scrivere le equazioni. I nodi invece sono ancora presenti, costituiti dalle giunzioni dei bipoli.
Scelto un verso per le correnti, è sufficiente riferirsi al grafo, che diventa così *orientato*, per poter scrivere le equazioni per le correnti. Se si sceglie un'assegnata convenzione sui bipoli, rimangono univocamente identificati i versi di riferimento per le tensioni, e dunque anche la scrittura delle equazioni per le tensioni può essere effettuata basandosi sul grafo orientato.

- Un **grafo** $G(N, L)$ è costituito dall'insieme di n nodi, dall'insieme di l lati e dalla *relazione di incidenza* che ad ogni lato (bipolo) fa corrispondere la coppia di nodi nei quali quel lato incide.
- Se ogni lato del grafo è orientato, esso si dice **orientato.**
- Si consideri un grafo $G(N, L)$. Il grafo $G_1(N_1, L_1)$ si dice **sottografo** di $G(N, L)$ se N_1 è un sottoinsieme di N, L_1 è sottoinsieme di L, la loro relazione di incidenza è la stessa.
- Un grafo si dice **connesso** se ogni nodo è collegato ad un qualsiasi nodo attraverso uno o più lati.
- Un grafo si dice **ridotto** se tra due nodi qualsiasi non vi è più di un solo collegamento.
- Un grafo si dice **completo** se ogni nodo è direttamente collegato a tutti gli altri.
- Si definisce **maglia** di un grafo, un sottogtafo connesso in cui in ciascun nodo incidono due e due soli lati.
- Una maglia si dice **connessa** se ad essa viene assegnata un verso di riferimento.
- Un **albero** A di un grafo G è un suo sottografo che comprende tutti i nodi del grafo e non contiene nessuna maglia.
- Un **coalbero** C di un grafo G, corrispondente all'albero A, è l'insieme dei lati complementari a quelli di un albero: l'unione dei lati dell'albero e del coalbero coincide con l'insieme di tutti i lati del grafo.
- Per un qualsiasi albero vale la seguente proprietà fondamentale: *"sia G un grafo connesso con n nodi ed l lati. Cisacun albero del grafo G è costituito da* $(n-1)$ *lati, indipendentemente dal numero di lati del grafo e dalla relazione di incidenza."*

- ☞ Essendo sempre $(n-1)$ il numero di lati dell'albero, e dal fatto che il coalbero è il complemento all'albero si ha una seconda proprietà: *"sia G un grafo connesso con n nodi e l lati. Cisacun coalbero del grafo G è costituito da* $[l-(n-1)]$ *lati, indipendentemente dalla relazione di incidenza del grafo."*
- ☞ Un grafo si dice **planare** se può essere tracciato su di un piano senza che nessuna coppia di lati si intersechi con un punto che non sia un nodo.
- ☞ Un **anello** è una maglia del grafo planare che non contiene lati al suo interno.

Insieme di taglio:
si consideri un grafo connesso $G(N,L)$. Un sottoinsieme T dei lati L si dice *insieme di taglio* se contemporaneamente:
- ☞ la rimozione dal grafo di tutti i lati dell'insieme di taglio conduce a due sottografi non connessi;
- ☞ il ripristino di uno qualsiasi dei lati dell'insieme di taglio connette nuovamente i due sottografi.

Se il grafo è orientato, l'insieme di taglio si dice orientato.

FORMA MATRICIALE DELLE EQUAZIONI DI KIRCHHOFF

Le equazioni di Kirchhoff per le correnti e le tensioni possono essere scritte in maniera più sintetica e compatta ponendole in forma matriciale. In questo modo risulta anche più agevole la loro manipolazione algebrica.

MATRICE DI INCIDENZA

Si consideri un grafo orientato *G* costituito da *n* nodi ed *l* lati. È possibile assegnare la relazione di incidenza utilizzando una matrice di *n* righe ed *l* colonne. A questa matrice si da il nome di *matrice di incidenza* del grafo.

$$A_{a_{i,j}}\begin{cases}+1 \text{ se il lato } j \text{ incide nel nodo } i \text{ ed è uscente;}\\ -1 \text{ se il lato } j \text{ incide nel nodo } i \text{ ed è entrante;}\\ \quad 0 \text{ se il lato } j \text{ non incide nel nodo } i.\end{cases}$$

La matrice di incidenza ha una proprietà molto interessante. Premesso che un albero è definito univocamente se si assegnano gli $(n-1)$ lati che lo compongono, si ha: *"$n-1$ lati corrispondenti a $n-1$ colonne di A_a (ogni colonna è associata ad un lato) linearmente indipendenti formano un albero e viceversa."*
Questa proprietà consente lo sviluppo di procedure automatiche, eseguibili al calcolatore, per la ricerca di alberi e coalberi in un grafo.
La matrice di incidenza è importante, non solo perché attraverso di essa è possibile rappresentare in maniera estremamente semplice e sintetica la relazione di incidenza del grafo di un circuito, ma soprattutto perché attraverso di essa è possibile scrivere direttamente le equazioni di Kirchhoff per le correnti.

MATRICE DI MAGLIA

Le maglie orientate di un grafo possono essere descritte attraverso una relazione analoga a quella di incidenza, che associa a ciascuna maglia i lati che la compongono. Questa relazione può essere rappresentata attraverso una matrice, detta *matrice delle maglie*: le righe sono associate alle maglie, le colonne sono associate ai lati. Si indichi con *m* il numero di maglie distinte del grafo ($m < l$, sempre), le si ordinino associando a ciascuna di esse un numero naturale e le si orientino assegnando un verso di percorrenza in maniera arbitraria. La *i-esima* riga è associata alla *i-esima* maglia e la *j-esima* colonna è associata al *j-esimo* lato. Il generico elemento $b_{i,j}$ è così definito:

$$\begin{cases}+1 \text{ lato } j \text{ appartenente alla maglia } i \text{ ed i versi sono concordi;}\\ -1 \text{ lato } j \text{ appartenente alla maglia } i \text{ ed i versi sono discordi;}\\ \quad 0 \text{ se il lato } j \text{ non appartiene alla maglia } i.\end{cases}$$

La matrice delle maglie non è a rango massimo. Ciò è una proprietà generale ed è conseguenza del fatto che, se si considerano tutte le maglie di un grafo, esse non sono indipendenti tra loro.

EQUAZIONI DI KIRCHHOFF INDIPENDENTI

Le equazioni circuitali sono costituite dalle equazioni di Kirchhoff e dalle equazioni caratteristiche degli elementi circuitali. Le prime sono algebriche, lineari ed omogenee, le seconde variano in base alla natura degli elementi

circuitali, di fatti possono essere lineari o non lineari, algebriche o differenziali, omogenee o non omogenee, tempo varianti o tempo invarianti.
Un sistema di equazioni si dice *ben posto* se ammette *un'unica soluzione* per assegnati termini noti e condizioni iniziali. Una condizione necessaria affinché un sistema sia ben posto è che le equazioni *indipendenti* siano tante quante sono le incognite del problema. Se almeno una di esse è ottenuta combinando le altre, allora sono *dipendenti*.

Proprietà di indipendenza delle equazioni di Kirchhoff per le correnti:
"per un circuito con grafo connesso con n nodi, $n-1$ equazioni di Kirchhoff per le correnti, scelte in maniera arbitraria tra le possibili n, sono linearmente indipendenti."

Proprietà di indipendenza delle equazioni di Kirchhoff per le tensioni:
"per un circuito con grafo connesso con n nodi ed l lati, le $l-(n-1)$ equazioni di Kirchhoff per le tensioni relative ad un insieme di maglie fondamentali sono linearmente indipendenti. Le equazioni di Kirchhoff per le altre maglie del circuito possono essere espresse come combinazioni lineari delle equazioni per le maglie fondamentali."

POTENZIALI DI NODO E CORRENTI DI MAGLIA

Le equazioni di interconnessione di un circuito possono essere riformulate attraverso l'introduzione dei *potenziali di nodo* e delle *correnti di maglia*.
Il *metodo dei potenziali nodali* consiste nell'esprimere le tensioni di ciascun lato attraverso delle opportune grandezze ausiliarie, in maniera tale da imporre che la legge di Kirchhoff per le tensioni sia verificata automaticamente per ogni maglia del circuito. Analogamente il *metodo delle correnti di maglia* consiste nell'esprimere le intensità di corrente di ciascun lato attraverso altre grandezze ausiliarie in maniera tale da imporre che la legge di Kirchhoff per le correnti sia verificata automaticamente per ogni nodo del circuito.

"Se le tensioni di un circuito sono espresse attraverso i potenziali di nodo, allora esse verificano automaticamente la legge di Kirchhoff per le tensioni per qualsiasi maglia del circuito."

CONSERVAZIONE DELLE POTENZE ELETTRICHE

Si consideri un circuito C con l bipoli e siano $i_1, \dots, i_l$ le intensità di corrente e $v_1, \dots, v_l$ le tensioni. Supponiamo per semplicità di scegliere per tutti i bipoli la stessa convenzione, ad esempio quella dell'utilizzatore. L'espressione della potenza elettrica assorbita dal *k-esimo* bipolo (con $k = 1, 2, \dots, l$) del circuito è data da
$$p_k(t) = i_k(t)v_k(t) \quad .$$
Pertanto vale sempre la proprietà di conservazione delle potenze elettriche che afferma che:
"la somma delle potenze elettriche assorbite da tutti i bipoli di un circuito è, istante per istante, uguale a zero."
$$\sum_{k=1}^{l} p_k\,(t) = \sum_{k=1}^{l} i_k\,(t)v_k(t) = 0 \quad .$$
Questa proprietà è solo conseguenza del fatto che le intensità di corrente e le tensioni del circuito verificano le leggi di Kirchhoff. Essa non dipende in alcun modo dalla natura specifica dei singoli elementi circuitali e, quindi, dalle loro relazioni caratteristiche.
La proprietà di conservazione delle potenze elettriche vale , ovviamente, anche se facciamo riferimento alle potenze erogate:
"la somma delle potenze elettriche erogate da tutti i bipoli di un circuito è, istante per istante, uguale a zero."
In generale, in ogni circuito, la somma delle potenze assorbite da un certo insieme di bipoli è uguale, istante per istante, alla somma delle potenze erogate dalla restante parte dei bipoli, cioè
$$\sum_{i=1}^{m} p_i^{(a)} = \sum_{j=m+1}^{l} p_j^{(e)} \quad .$$

TEOREMA DI TELLEGEN

La proprietà di conservazione delle potenze elettriche è una diretta conseguenza solo delle leggi di Kirchhoff. In virtù di ciò, questa proprietà vale anche quando, invece della potenza elettrica, si considera una grandezza più generale, la *potenza virtuale*, di cui la potenza elettrica risulta essere un caso più particolare.

Consideriamo due circuiti diversi, ma con lo *stesso grafo orientato*. Essi hanno le stesse interconnessioni, ma differenti bipoli sui lati corrispondenti; inoltre sui lati sono state fatte le stesse scelte per i versi di riferimento delle intensità di corrente. Indichiamo il primo circuito con C' ed il secondo con C'', e fissiamo per ciascun lato la convenzione dell'utilizzatore sia sul primo che sul secondo circuito.

Se consideriamo le intensità di corrente del circuito C' e le tensioni del circuito C'' (o viceversa), per il *k-esimo* lato ($k = 1, 2, \dots, l$) del grafo dei due circuiti, possiamo definire la *potenza virtuale assorbita* come

$$\widehat{p_k} = i'_k v''_k \ (\text{o } \widehat{p_k} = i''_k v'_k\ ) \ .$$

Alla grandezza così definita si da il nome di "potenza" perché essa è dimensionalmente omogenea con una potenza; l'aggettivo "virtuale" sta ad indicare che essa <u>non ha alcun significato fisico</u>, in quanto l'intensità di corrente è del circuito C' e la tensione è del circuito C' (o viceversa) e tra esse non intercorre alcuna relazione; l'aggettivo "assorbita" sta a indicare che il prodotto è tra tensione e un'intensità di corrente i cui riferimenti per i versi sono scelti con la convenzione dell'utilizzatore.

Alla grandezza

$$\widehat{p_k^{(e)}} = -\widehat{p_k} \quad ,$$

si da il nome di *potenza virtuale erogata*. Essa è uguale al prodotto tra intensità di corrente e tensione concordi con la convenzione del generatore. Quando gli elementi dei due circuiti C' e C'' sono uguali, la potenza virtuale coincide con la potenza elettrica.

Il *teorema di Tellegen (o della conservazione delle potenze virtuali)* afferma che:

"si considerino due circuiti C' e C'' che hanno lo stesso grafo orientato. La somma delle potenze virtuali assorbite da ciascun lato del grafo è uguale a zero."

$$\sum_{k=1}^{l} i'_k\, v''_k = 0 \quad \left(\text{o} \sum_{k=1}^{l} i''_k\, v'_k = 0 \right) \ .$$

Questa proprietà è notevole se si osserva che tra le intensità di corrente e le tensioni non sussiste alcuna relazione, se non quella di fare riferimento allo stesso grafo orientato e di soddisfare indipendentemente le rispettive leggi di Kirchhoff. È interessante notare che se una delle due leggi di Kirchhoff è unita al teorema di Tellegen, implica l'altra legge:

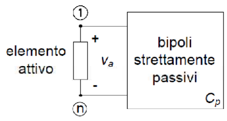
"se per ogni insieme di tensioni del circuito che verificano le equazioni di Kirchhoff per le tensioni è verificata la conservazione delle potenze virtuali, allora le intensità di corrente del circuito verificano naturalmente le equazioni di Kirchhoff per le correnti;"

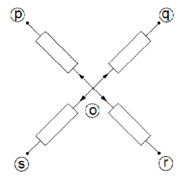
$$\Leftrightarrow$$

"se per ogni insieme delle intensità di corrente del circuito che verificano le equazioni di Kirchhoff per le correnti è verificata la conservazione delle potenze virtuali, allora le tensioni del circuito verificano naturalmente le leggi di Kirchhoff per le tensioni. "

PROPRIETÀ DI NON AMPLIFICAZIONE

È una proprietà che vale solo per i circuiti a-dinamici, cioè quelli senza condensatori ed induttori, con un solo bipolo attivo (ad es. Un generatore ideale).





PROPRIETÀ DI NON AMPLIFICAZIONE DELLE TENSIONI
"Si consideri un circuito costituito da resistori ***strettamente passivi****, che possono essere anche non lineari, ed un solo* ***bipolo attivo****. La tensione del generico bipolo strettamente passivo non può superare, in valore assoluto, quella dell'unico bipolo attivo."*

Per dimostrare questa proprietà consideriamo un generico circuito composto da un solo bipolo attivo e per il resto da tutti bipoli strettamente passivi. Per fissare le idee scegliamo il verso di riferimento della tensione v_a dell'unico bipolo attivo in modo tale che essa sia positiva. Inoltre, indichiamo con n il numero dei nodi e li numeriamo in modo che i nodi 1 ed n siano quelli ai quali è collegato il bipolo attivo. Indichiamo con $u_1, u_2, \dots, u_n$ i potenziali dei nodi del circuito. Avendo supposto $v_a = u_1 - u_n > 0$, segue immediatamente che $u_1 > u_n$.
Consideriamo ora un generico nodo O del circuito, diverso dai nodi 1 ed n, ed i bipoli ad esso collegati. Immaginando che al nodo in questione siano collegati, ad esempio, quattro bipoli (si veda figura). Per le intensità di corrente di tali bipoli fissiamo i versi di riferimento tutti uscenti dal nodo (solo per semplificare la dimostrazione). Applicando la LKC al nodo O otteniamo immediatamente

$$i_p + i_q + i_r + i_s = 0$$

dove le intensità di corrente sono state indicate con i pedici relativi al secondo nodo in cui i bipoli sono stati collegati. Da questa equazione segue necessariamente:

- ☞ o le intensità di corrente i_p, i_q, i_r, i_s sono tutte nulle;
- ☞ oppure alcune sono positive, altre negative ed altre nulle.

Consideriamo la prima possibilità. Essendo i bipoli collegati al nodo O strettamente passivi, anche le corrispondenti tensioni sono identicamente nulle e dunque minori di quella del bipolo attivo. In questo caso abbiamo anche $u_p = u_q = u_r = u_s = u_0$. Considerando ora la seconda possibilità, necessarianente almeno due delle quattro intensità di corrente devono avere segno opposto. Assumiamo come ipotesi di lavoro

$$i_q > 0, \qquad i_r < 0\,.$$

Inoltre, dall'ipotesi di stretta passività di ha anche

$$p_q = i_q v_{oq} > 0, \qquad p_r = i_r v_{or} > 0\,.$$

Combinando le due relazioni di cui sopra, si ottiene

$$v_{oq} = u_0 - u_q > 0, \qquad v_{or} = u_o - u_r < 0\,,$$

quindi:

$$u_q < u_o < u_r\,.$$

Riassumendo, il valore del potenziale di un generico nodo diverso dai nodi 1 ed n ai quali è collegato l'unico bipolo attivo non è né il massimo né il minimo.
In conclusione del ragionamento, possiamo dunque ordinare i nodi in modo tale da avere per i potenziali la relazione d'ordine:

$$u_1 > u_2 \geq \cdots \geq u_{n-1} > u_n\,.$$

Quindi si evince che il valore assoluto della tensione di un qualsiasi bipolo $v_j = u_k - u_h$ strettamente passivo non può essere mai più grande della tensione $v_a = u_1 - u_n$ dell'unico bipolo attivo. Infatti, siccome per $u_1 > u_2 \geq \cdots \geq u_{n-1} > u_n$ deve essere necessariamente $u_1 \geq u_k \geq u_n$ ed anche $u_1 \geq u_h \geq u_n$, si ha $|u_k - u_h| \leq u_1 - u_n$ dunque, in definitiva

$$|v_j| \leq v_a\,.$$

Il caso limite in cui c'è il segno di uguaglianza si ha solo per gli eventuali bipoli collegati in parallelo all'unico bipolo attivo.

PROPRIETÀ DI NON AMPLIFICAZIONE DELLE CORRENTI
"Si consideri un circuito costituito da resistori ***strettamente passivi****, che possono essere anche non lineari, ed un solo* ***bipolo attivo****. L'intensità di corrente del generico bipolo strettamente passivo non può superare, in valore assoluto, quella dell'unico bipolo attivo."*

Per dimostrare questa proprietà osserviamo anzitutto che i potenziali dei nodi del circuito possono essere ordinati, avendo denominato con 1 e con n i nodi a cui è collegato il bipolo attivo. Assumendo come ipotesi di lavoro $v_a = u_1 - u_n > 0$, l'intensità di corrente del bipolo attivo i_a risulta necessariamente positiva. Di ciò è immediato rendersi conto applicando al circuito la conservazione delle potenze.
Consideriamo ora un generico bipolo, che indichiamo con k, connesso a due qualsiasi nodi interni al circuito, cioè diversi da 1 ed n. Possiamo a questo punto considerare un insieme di taglio che contenga il lato k e tale da suddi-

videre i nodi in modo ordinato per il valore dei potenziali: i nodi da una parte del taglio hanno tutti valori di potenziale più alto dei rimanenti.
Osserviamo che essendo per ipotesi u_1 il potenziale massimo ed u_n quello minimo, i nodi 1 ed n risultano separati dal taglio e quindi il lato che corrisponde al bipolo attivo appartiene al taglio.
Se orientiamo il taglio dall'insieme dei nodi a potenziale maggiore verso quelli a potenziale minore e applichimo ad esso la LKC, tenuto conto che per tutti i lati del taglio che corrispondono ai bipoli strettamente passivi deve essere $p = vi \geq 0$, risulta

$$i_a = \sum i_s\,, \qquad \text{con } i_s \geq 0 \;\forall\, s$$

e dunque $i_a \geq i_s$ ed in particolare $i_a \geq\; i_k$. Stante l'arbitrarità della scelta del lato k, e la circostanza che è sempre possibile costruire un taglio come quello considerato che contenga insieme il lato k ed il lato attivo, la proprietà risulta dimostrata.

BIPOLI EQUIVALENTI E CONNESSIONI SERIE - PARALLELO

Un concetto fondamentale per i circuiti è quello di *equivalenza*. In generale può accadere che due bipoli di diversa costituzione o che rappresentino diversi componenti abbiano la stessa relazione caratteristica.

"Due bipoli di diversa costituzione si dicono equivalenti quando le loro relazioni caratteristiche coincidono."

L'equivalenza tra due elementi implica che possiamo sostituire l'uno all'altro senza produrre cambiamenti nel funzionamento della rimanente parte del circuito.
Un caso molto frequente in cui si può applicare utilmente l'equivalenza è quello di bipoli "composti", costituiti da resistori lineari e/o generatori ideali.

BIPOLI IN SERIE

Due bipoli sono connessi in *serie* se hanno un nodo in comune in esclusiva.
Le intensità delle correnti elettriche dei bipoli connessi in serie sono uguali, se si scelgono opportunamente i versi di riferimento.

BIPOLI IN PARALLELO

Due bipoli sono connessi in parallelo se entrambi i loro terminali sono connessi alla stessa coppia di nodi.
Si usa la notazione $B_1||B_2$, dove B_1 e B_2 sono dei generici bipoli, per indicare che due bipoli B_1 e B_2 sono connessi in parallelo.
Le tensioni di due bipoli connessi in parallelo sono uguali, se si scelgono opportunamente i versi di riferimento.

RESISTORI LINEARI CONNESSI IN SERIE: PARTITORE DI TENSIONE

Consideriamo due resistori lineari, con resistenze R_1 e R_2, collegati in serie. Si ha che le tensioni sui resistori sono date da:

$$v_1 = R_1 i_1\,, \qquad v_2 = R_2 i_2\,.$$

Da queste è possibile ricavare la tensione sul resistore equivalente che sarà quindi:

$$v_s = (R_1 + R_2)i\,,$$

dove $i = i_1 = i_2$.
Allora il resistore di *resistenza*

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

è equivalente al bipolo costituito dal resistore con resistenza R_1 in serie col resistore di resistenza R_2.

Esiste una semplice relazione tra la tensione di ciascun resistore della serie v_1, v_2 e la tensione (totale) v_s della serie:

$$v_1 = v_s \frac{R_1}{R_1 + R_2}\,, \qquad v_2 = v_s \frac{R_2}{R_1 + R_2}\quad .$$

Queste sono le cosiddette formule del *partitore di tensione.*

Quando due resistori R_1 ed R_2 sono di uguale valore, il valore della resistenza equivalente è due volte il valore delle singole resistenze della serie. In questo caso le tensioni v_1 e v_2 sono uguali e sono la metà della tensione della serie: $v_1 = v_2 = v_s/2$.
Nel limite $R_1 \to 0$, cioè il resistore tende a diventare un cortocircuito, si ha $v_1 \to 0$ e $v_2 \to v_s$, mentre nel limite per $R_1 \to \infty$, cioè il resistore tende a diventare un circuito aperto, si ha $v_1 \to v_s$ e $v_2 \to 0$.
Nel caso di m resistori connessi in serie $R_1, R_2, \dots, R_m$, la resistenza del bipolo serie equivalente vale:

$$R_{eq} = R_1, R_2, \dots, R_m = \sum_{i=1}^{m} R_i \,,$$

e la tensione v_i dell'*i-esimo* resistore è legata alla tensione v_s della serie tramite la relazione

$$v_i = (\pm) v_s \frac{R_i}{\sum_{j=1}^{m} R_j},$$

dove deve essere considerato il segno positivo se i riferimenti per i versi delle due tensioni sono concordi o, in caso contrario, il segno negativo.

RESISTORI LINEARI CONNESSI IN PARALLELO: PARTITORE DI CORRENTE

Consideriamo due resistori lineari, con resistenze R_1 e R_2, collegati in parallelo.

$$i_p = (G_1 + G_2) v \,,$$

dove $G_1 = \frac{1}{R_1}$ e $G_2 = \frac{1}{R_2}$ sono le conduttanze dei resistori. Allora il resistore di *conduttanza*

$$G_{eq} = G_1 + G_2$$

è equivalente al bipolo costituito dal resistore di conduttanza G_1 connesso in parallelo al resistore di conduttanza G_2. Se invece della conduttanza equivalente si considera la resistenza equivalente, si ha

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Esiste una semplice relazione tra l'intensità di corrente in ogni resistore del parallelo i_1 ed i_2 e l'intensità di corrente i_p del parallelo:

$$i_1 = i_p \frac{G_1}{G_1 + G_2} \,, \qquad i_2 = i_p \frac{G_2}{G_1 + G_2} \,.$$

Queste sono le cosiddette formule del *partitore di corrente*, le quali possono essere riformulate utilizzando le resistenze. Diventano:

$$i_1 = i_p \frac{R_2}{R_1 + R_2} \,, \qquad i_2 = i_p \frac{R_1}{R_1 + R_2} \,.$$

Quando le due resistenze R_1 ed R_2 sono uguali, il valore della resistenza equivalente è la metà del valore delle singole resistenze del parallelo: le intensità delle correnti i_1 ed i_2 sono uguali fra loro e pari alla metà dell'intensità di corrende del parallelo: $i_1 = i_2 = i_p/2$.

Nel limite $R_1 \to 0$, cioè il resistore tende a diventare un cortocircuito, si ha $i_1 \to i_p$ e $i_2 \to 0$, mentre nel limite per $R_1 \to \infty$, cioè il resistore tende a diventare un circuito aperto, si ha $i_1 \to 0$ e $i_2 \to i_p$.

Nel caso di m resistori connessi in parallelo $R_1, R_2, \dots, R_m$, la resistenza del bipolo parallelo equivalente vale:

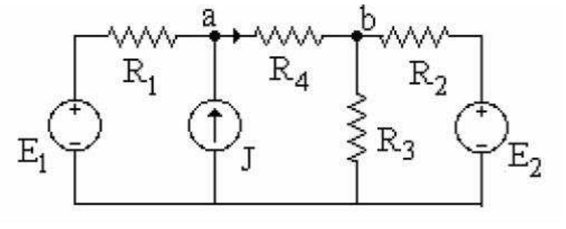
$$R_{eq} = \frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \dots, \frac{1}{R_m} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{R_i} \,,$$

e l'intensità di corrente i_k del *k-esimo* resistore è legata all'intensità di corrente del parallelo dall relazione

$$i_k = (\pm) i_p \frac{G_k}{\sum_{h=1}^{m} G_h},$$

dove deve essere considerato il segno positivo se i versi di riferimento delle intensità delle correnti i_k e i_p sono discordi rispetto al nodo o, in caso contrario, il segno negativo.

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI



Consideriamo un circuito composto da resistori lineari e da più generatori ideali, come quello in figura.

È possibile risolvere un circuito del genere utilizzando quello che in elettrotecnica è definito come *principio di sovrapposizione degli effetti*.

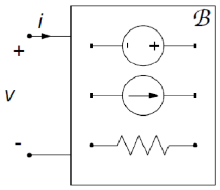
La sovrapposizione degli effetti consiste nel risolvere il circuito considerando un solo generatore per volta. Se prendiamo ad esempio il circuito in figura, per applicare la sovrapposizione degli effetti dovremmo staccare due generatori e lasciarne attivo uno per procedere. Applicando tre volte questo metodo avremmo la risoluzione del circuito. È importante sapere che quando si utilizza questo metodo, i generatori che vengono "spenti" devono comportarsi in un certo modo, in particolare, i generatori ideali di tensione si comportano come corto circuito, mentre quelli di corrente si comportano come un circuito aperto.

METODO DEI POTENZIALI NODALI
Consideriamo sempre il circuito in figura. Esso è risolvibile (ed in questo caso risulta anche più vantaggioso) tramite il metodo dei *potenziali nodali*. Esso consiste nell'individuare due nodi, in questo caso a e b sui quali andremo a ricavare la tensione che ci consentirà poi di giungere ai valori degli elementi che ci interessano per il calcolo da affrontare.
Assegnati i valori delle resistenze, è possibile calcolare il potenziale ai nodi di ogni bipolo, considerando la parte sottostante del circuito come un unico nodo nullo. Se ad esempio volessimo calcolare la corrente su R_1 dobbiamo scrivere un sistema (formato da tante equazioni quanti sono i nodi) come segue:

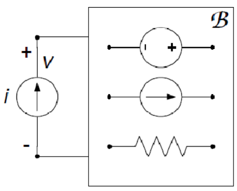
$$\begin{cases} \dfrac{a-E_1}{R_1} + \dfrac{a-b}{R_4} = J \\ \dfrac{b-E_2}{R_2} + \dfrac{b}{R_3} = 0 \end{cases}$$

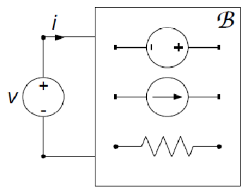
Il tutto è espresso in termini di correnti, infatti è doveroso ricordare che la corrente su un bipolo è data da $i = V/R$ (ad es. $a - E_1$ è la tensione sul resistore R_1).
Si noti che i versi di riferimento scelti, in questo caso sono postivi se essi risultano uscenti dai nodi, e negativi in caso contrario.

GENERATORE EQUIVALENTE DI THÉVENIN-NORTON
Il comportamento ai terminali di un qualsiasi bipolo costituito da soli resistori lineari (ed eventualmente anche da generatori controllati lineari), quindi senza generatori indipendenti, può essere sempre descritto attraverso un singolo resistore equivalente. Naturalmente è di grande interesse riuscire a trovare un analogo modo di procedere nel caso di bipoli che non siano inerti, che contengono, cioè, dei generatori indipendenti.



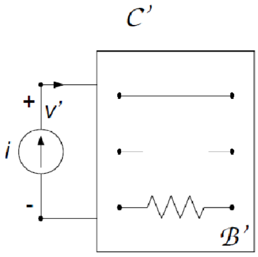
(a)



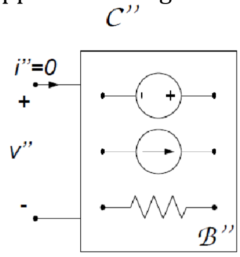


Consideriamo un generico bipolo B composto da resistori lineari e generatori ideali. Per individuare la relazione caratteristica bisogna determinare la relazione tra l'intensità di corrente i e la tensione v per tutti i valori ammissibili. Ciò può essere fatto attraverso un esperimento concettuale in due modi diversi ma equivalenti. Ad esempio, si può immaginare di imporre l'intensità di corrente i attraverso un generatore ideale di corrente e determinare corrispondentemente la tensione v: questa è la cosiddetta *caratterizzazione su base corrente*. Lo stesso risultato si può ottenere imponendo la tensione v attraverso un generatore ideale di tensione e determinando la corrispondente intensità di corrente: questa è la cosiddetta *caratterizzazione su base tensione*. I due modi di procedere sono del tutto equivalenti, fatta eccezione per due casi limite molto particolari.
Procediamo considerando dapprima la caratterizzazione su base corrente.
Vogliamo determinare la relazione che lega la tensione v all'intensità di corrente i impressa dal generatore ideale. Assumendo preliminarmente che il circuito abbia in questo caso una sola soluzione per ogni valore di i, essendo lineare, essa può essere determinata attraverso la sovrapposizione degli effetti.

C'



C''



A tale scopo si considerino due *circuiti ausiliari*: il primo circuito C' è stato ottenuto spegnendo nel circuito b di fig. 4.33 tutti i generatori indipendenti di B, mentre il secondo, C'', è stato ottenuto spegnendo solo il generatore di corrente di caratterizzazione.
Il bipolo B' è costituito da soli resistori lineari, circuiti aperti e cortocircuiti. Esso può essere rappresentato tramite un resistore equivalente. Sia R_{Th} la resistenza equivalente di B', allora la tensione v' vale:

$$v' = R_{Th} i\,.$$

La resistenza R_{Th} prende anche il nome di *resistenza equivalente di Thévenin.*
Indichiamo con $v'' = E_0$ la tensione di B quando l'intensità di corrente i è uguale a zero. Abbiamo in questo modo definito la cosiddetta *tensione a vuoto* o *a circuito aperto* del bipolo. Essa è indipendente dall'intensità di corrente i, dipende unicamente dalla struttura interna del bipolo B.
Applicando la sovrapposizione degli effetti abbiamo dunque

$$v = v' + v''$$

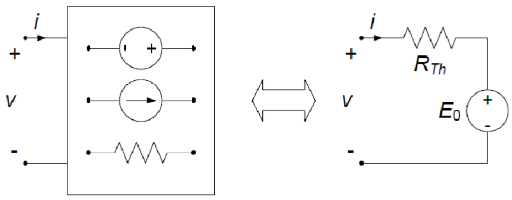
E sostituendo le espressioni di v' e v'' otteniamo in definitiva

$$v = R_{Th} i + E_0 \,.$$

Questa è la relazione caratteristica del bipolo B in esame e coincide con quella del generatore "reale" di tensione. Di conseguenza, il comportamento ai terminali di un qualsiasi bipolo costituito da resistori lineari e generatori ideali è descrivibile attraverso un *generatore reale di tensione* con valori della resistenza equivalente e tensione a vuoto opportuni. Questo risultato è conosciuto con il nome di <u>*teorema di Thévenin*</u>:

"si consideri un bipolo B costituito da resistori lineari e generatori ideali. Si assuma che il circuito ottenuto collegando il bipolo B ad un generatore ideale di corrente ammetta una ed una sola soluzione. Allora il comportamento ai terminali del bipolo B è equivalente al ***generatore equivalente di Thévenin****, dove:*

- ☞ *R_{Th}, detta* ***resistenza equivalente di Thévenin****, è la resistenza equivalente del bipolo B, quando tutti i generatori indipendenti all'interno di B sono* ***spenti****;*
- ☞ *E_0, detta* ***tensione a vuoto*** *(o* ***a circuito aperto****), è la tensione fra i terminali del bipolo B quando esso è collegato ad un circuito aperto e, quindi, l'intensità di corrente del bipolo è uguale a zero."*



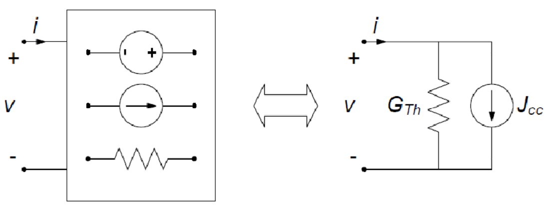
Ora realizziamo la caratterizzazione su base tensione del bipolo considerato. Supponiamo che il circuito in esame ammetta una ed una sola soluzione per ogni valore di tensione v del generatore di caratterizzazione ed applicando la sovrapposizione degli effetti come in precedenza, è semplice verificare che la relazione tra l'intensità di corrente i e la tensione v diviene:

$$i = G_{Th} v + J_{cc} \,,$$

dove G_{Th} è la conduttanza equivalente del bipolo B quando tutti i generatori sono spenti e J_{cc} è l'intensità di corrente del bipolo quando è collegato ad un corto circuito.
Questa è la relazione caratteristica di un *generatore "reale" di corrente* con opportune conduttanza equivalente ed intensità di corrente di corto circuito. Tale formulazione, equivalente alla precedente, prende il nome di <u>*teorema di Norton*</u>:

"si consideri un bipolo B costituito da resistori lineari e generatori ideali. Si assuma che il circuito ottenuto collegando il bipolo resistivo "lineare" B ad un generatore ideale di tensione ammetta una ed una sola soluzione. Allora B può essere rappresentato attraverso il ***generatore equivalente di Norton****, dove:*

- ☞ *G_{Th}, detta* ***conduttanza equivalente di Norton****, è la conduttanza equivalente del bipolo B, dopo avere spento tutti i generatori all'interno di esso;*
- ☞ *J_{cc}, detta* ***intensità di corrente di corto circuito****, è l'intensità di corrente del bipolo quando esso è collegato ad un corto circuito."*



È immediato verificare che quando $R_{Th} \neq 0$ e $G_{Th} \neq 0$ le relazioni $v = R_{Th} i + E_0$ e $i = G_{Th} v + J_{cc}$ sono invertibili e, quindi, il bipolo B può essere rappresentato sia dal generatore equivalente di Thévenin che dal generatore equivalente di Norton. Valgono, allora, le relazioni:

$$R_{Th} = \frac{1}{G_{Th}} \,, \qquad J_{cc} = -\frac{E_0}{R_{Th}} \,.$$

Esse consentono di determinare i parametri del generatore equivalente di Norton del bipolo B a partire da quelli del generatore equivalente di Thévenin, e viceversa. Può anche accadere che $E_0 = 0$ e/o $J_{cc} = 0$, pur essendovi dei generatori.
Esistono poi anche dei casi limite per i quali si ha $R_{Th} = 0$ e $G_{Th} = 0$. basti pensare ad un bipolo costituito da un solo generatore ideale di tensione o di corrente.

CIRCUITI DINAMICI LINEARI A REGIME

Qualsiasi grandezza di un circuito dissipativo può essere sempre espressa come somma di due termini, un termine *transitorio* ed un termine di *regime permanente*:

$$x(t) = x_t(t) + x_r(t) \,.$$

Il termine transitorio, che dipende dal valore iniziale delle grandezze di stato del circuito, tende a zero per $t \to +\infty$ a causa della dissipazione nei resistori e della passività degli elementi dinamici. Viceversa il termine di regime permanente, che dipende solo dai generatori indipendenti, rappresenta ciò che resta della soluzione quando il transitorio si è estinto completamente. Il termine di regime rappresenta anche la soluzione che si instaurerebbe nel circuito al generico istante t finito se il circuito avesse iniziato a funzionare all'istante iniziale $t_0 \to -\infty$.
La funzione del tempo che descrive l'andamento del regime permanente dipende dall'andamento nel tempo delle tensioni dei generatori indipendenti di tensione e delle intensità di corrente dei generatori indipendenti di corrente.
Nei casi considerati abbiamo trovato che:

- ☞ Il regime permanente è *stazionario* (cioè costante nel tempo) se la tensione (o l'intensità di corrente) impressa è *stazionaria*;
- ☞ Il regime permanente è *sinusoidale* con pulsazione ω se la tensione (o l'intensità di corrente) impressa è *sinusoidale con pulsazione* ω.

Possiamo dunque affermare in generale che:

- ☞ *In un circuito lineare, tempo-invariante, dissipativo, dopo l'esaurimento del transitorio, le tensioni e le intensità di corrente sono costanti nel tempo se tutti i generatori indipendenti sono costanti nel tempo: il circuito raggiunge il* ***regime stazionario****;*
- ☞ *In un circuito lineare, tempo-invariante, dissipativo, alimentato da uno o più generatori sinusoidali tutti con la stessa pulsazione* ω*, dopo l'esaurimento del transitorio, le tensioni e le intensità di corrente sono sinusoidali alla stessa pulsazione: il circuito raggiunge il* ***regime sinusoidale****.*

CIRCUITI IN REGIME STAZIONARIO

Si consideri un circuito dinamico C_d lineare tempo invariante, costituito da resistori, condensatori, induttori e generatori indipendenti *stazionari* di tensione e/o corrente, si assuma che il circuito C_d sia in regime stazionario. Tutte le tensioni e le intensità di corrente del circuito sono costanti nel tempo. Consideriamo un generico condensatore di capacità C ed indichiamo con v_C ed i_C la tensione e l'intensità di corrente. In regime stazionario si ha che:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = 0 \,.$$

Analogamente, considerando un induttore di induttanza L ed indicando con v_L ed i_L la tensione e l'intensità di corrente, abbiamo:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} = 0 \,.$$

Allora possiamo concludere che un generico condensatore in regime stazionario si comporta come un circuito aperto ed un generico induttore come un corto circuito.
A questo punto, risulta evidente che la soluzione stazionaria del circuito C_d coincide con la soluzione del corto circuito a-dinamico C_a, ottenuto sostituendo ad ogni condensatore un circuito aperto e ad ogni induttore un corto circuito. Le tensioni dei condensatori sono le tensioni dei corrispondenti circuiti aperti nel circuito C_a e le intensità di corrente sono quelle dei corrispondenti corto circuiti.
Possiamo, dunque, formulare la seguente procedura per la risoluzione di un circuito in regime stazionario:

- ☞ *Si sostituisca ad ogni condensatore un circuito aperto e ad ogni induttore un corto circuito;*
- ☞ *Si risolva il circuito di resistori, circuiti aperti, corto circuiti e generatori così ottenuto.*

CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE

Consideriamo ora un circuito dinamico C_d lineare tempo invariante, costituito da resistori, condensatori, induttori e generatori indipendenti di tensione e/o corrente *sinusoidali alla stessa pulsazione* ω (isofrequenziali). Si assuma che il circuito C_d sia a regime, cioè che ogni eventuale transitorio nella sua dinamica si è estinto. Dunque,

in virtù di quanto affermato in precedenza, tutte le tensioni e le intensità di corrente del circuito variano sinusoidalmente nel tempo.
Una funzione del tempo sinusoidale, ha in generale la forma

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha) = A_m \, cos(2\pi f \cdot t + \alpha),$$

dove la pulsazione $\omega = 2\pi f$, l'ampiezza massima A_m, la fase "iniziale" α e la frequenza f sono grandezze costanti reali.
La pulsazione ω è misurata nel S.I. in *radianti al secondo* (rad/s) e la frequenza f in *hertz* (Hz. $1Hz=1s^{-1}$). L'ampiezza massima è una grandezza sempre positiva.
La grandezza sinusoidale $a(t)$ è una funzione periodica con periodo $T = 2\pi/\omega$. Infatti si ha:

$$a(t+T) = A_m \, cos[\omega(t+T) + \alpha] = A_m \, cos(\omega t + \alpha) = a(t).$$

Per $\omega \to 0$ il periodo di $a(t)$ tende all'infinito, quindi la funzione sinusoidale tende ad una funzione costante:

$$a(t)|_{\omega=0} = A_m \, cos(\alpha) = A \, .$$

In tal senso, il regime stazionario può essere considerato come il limite per $\omega \to 0$ di un regime sinusoidale.
Una volta fissata la pulsazione ω, ogni tensione ed ogni intensità di corrente sinusoidale è caratterizzata da due sole grandezze: l'ampiezza massima e la fase iniziale. Allora è possibile istituire una corrispondenza tra le grandezze sinusoidali con la stessa pulsazione ed i numeri complessi. Essa permette di semplificare notevolmente l'analisi di circuiti in regime sinusoidale.

FASORI
Per fissata pulsazione ω ad ogni *funzione sinusoidale* è possibile associare un *numero complesso* $\bar{A}$ secondo la regola

$$\bar{A} = A_m \cos(\omega t + \alpha) \leftrightarrow \bar{A} = A_m e^{j\alpha}.$$

Ad esso si da il nome di *fasore rappresentativo* della funzione sinusoidale $a = a(t)$. La sopraccitata regola produce una *corrispondenza biunivoca* tra l'insieme delle funzioni sinusoidali di pulsazione ω e l'insieme dei fasori. Infatti, in base ad essa, la funzione sinusoidale $a(t)$ definisce univocamente il fasore rappresentativo $\bar{A}$. D'altra parte, in base alla stessa regola, a ciascun fasore $\bar{A}$ è possibile associare univocamente una funzione sinusoidale $a(t)$.
Utilizzando la *formula di Eulero*, possiamo anche scrivere:

$$\bar{A} = A_m \cos\alpha + j \sin\alpha \, .$$

È immediato verificare che la funzione sinusoidale $a(t)$ può essere espressa in termini del fasore rappresentativo attraverso la relazione

$$a(t) = Re\{\bar{A} e^{j\omega t}\}.$$

Tutte le intensità di corrente e le tensioni di un circuito in regime sinusoidale possono essere rappresentate tramite i fasori. Ciò è di grande vantaggio nella ricerca della soluzione di regime sinusoidale: difatti l'analisi del circuito in regime sinusoidale si può ricondurre alla risoluzione di sole equazioni algebriche lineari a coefficienti complessi, in cui le incognite sono proprio i fasori delle intensità di corrente e delle tensioni del circuito. Una volta determinati i fasori rappresentativi, utilizzando la corrispondenza $\bar{A} = A_m \cos(\omega t + \alpha) \leftrightarrow \bar{A} = A_m e^{j\alpha}$, si determinano le corrispondenti funzioni sinusoidali nel dominio del tempo. Questo in sintesi è il *metodo dei fasori*, anche noto come *metodo simbolico*.
La corrispondenza di cui sopra, gode delle seguenti proprietà:

- *Unicità;*
- *Linearità;*
- *Derivazione.*

METODO DEI FASORI
Consideriamo ora un generico circuito lineare tempo invariante C_ω, costituito da resistori, condensatori, induttori e generatori indipendenti sinusoidali di tensione e/o corrente, tutti con la stessa pulsazione ω e si assuma che esso sia in regime sinusoidale. Tutte le tensioni e le intensità di corrente del circuito sono funzioni sinusoidali del tempo con la stessa pulsazione dei generatori indipendenti.
Il modulo, e quindi la parte reale e la parte immaginaria dei fasori rappresentativi delle intensità di corrente, sono omogenei dimensionalmente ad una intensità di corrente, quindi si misurano in *ampere.* Analogamente, il modulo, e quindi la parte reale e la parte immaginaria dei fasori rappresentativi delle tensioni, sono omogenei dimensionalmente ad una tensione, quindi si misurano in *volt.*
Le equazioni circuitali possono essere riformulate in modo tale che le incognite siano direttamente i fasori rappresentativi delle intensità di corrente e delle tensioni.
Consideriamo le equazioni di Kirchhoff. Esse sono:

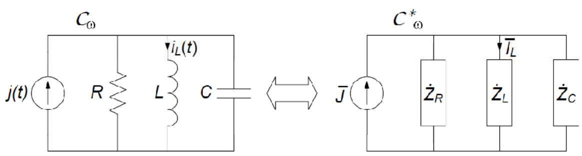
$$\sum\nolimits_h (\pm) i_h(t) = 0 \text{ per ogni nodo,}$$

$$\sum\nolimits_k (\pm) v_k(t) = 0 \text{ per ogni maglia.}$$

Utilizzando le proprietà di unicità e linearità, sostituendo, otteniamo:

$$\sum_h (\pm)\bar{I}_h = 0 \text{ per ogni nodo,}$$
$$\sum_k (\pm)\bar{V}_k = 0 \text{ per ogni maglia.}$$
Dunque anche i fasori rappresentativi delle intensità di corrente e delle tensioni verificano le equazioni di Kirchhoff.
Consideriamo, poi, le equazioni caratteristiche dei bipoli del circuito.
$v_k(t) - Ri_k(t) = 0$ → per i resistori,
$i_k(t) - C\dfrac{dv_k}{dt} = 0$ → per i condensatori,
$v_k(t) - L\dfrac{di_k}{dt} = 0$ → per gli induttori,
$v_k(t) = E_{mk}\cos(\omega t + \alpha_k)$ → per i generatori ideali di tensione,
$i_k(t) = J_{mk}\, cos(\omega t + \beta_k)$ → per i generatori ideali di corrente.
Applicando a queste equazioni le proprietà di unicità, di linearità e di derivazione, otteniamo ulteriori equazioni (tante quanti sono i bipoli) per i fasori rappresentativi delle intensità di corrente e delle tensioni. Esse sono:
$\bar{V}_k - R\bar{I}_k = 0$ → per i resistori,
$\bar{I}_k - j\omega C\bar{V}_k = 0$ → per i condensatori,
$\bar{V}_k - j\omega L\bar{I}_k = 0$ → per gli induttori,
$\bar{V}_k = E_{mk}e^{j\alpha_k}$ → per i generatori ideali di tensione,
$\bar{I}_k = J_{mk}e^{j\beta_k}$ → per i generatori ideali di corrente.

CIRCUITI DI IMPEDENZE
Le equazioni circuitali nel dominio dei fasori di un circuito hanno la stessa struttura di quelle di un *circuito resistivo lineare*. In particolare osserviamo che, nel dominio dei fasori, le equazioni caratteristiche dei bipoli lineari elementari sono tutte dello stesso tipo, cioè equazioni algebriche riconducibili alla forma
$$\bar{V} = \dot{Z}\bar{I}\,.$$
La grandezza $\dot{Z}$, in generale complessa, è indipendente dai fasori dell'intensità di corrente e della tensione. Essa prende il nome di *impedenza* del bipolo. Le espressioni delle impedenze dei bipoli elementari sono:
$$\dot{Z} = \begin{cases} R & \text{per il resistore di resistenza } R, \\ \dfrac{1}{j\omega C} & \text{per il condensatore di capacità } C, \\ j\omega L & \text{per l'induttore di induttanza } L. \end{cases}$$
La parte reale, la parte immaginaria ed il modulo delle impedenze sono grandezze dimensionalmente omogenee con una resistenza e quindi si misurano in *ohm*.
I fasori sono numeri complessi che rappresentano le intensità di corrente e le tensioni sinusoidali con una pulsazione assegnata. Le impedenze, invece, pur essendo numeri complessi, rappresentano le *relazioni tra i fasori* rappresentativi delle intensità di corrente e delle tensioni dei bipoli. Questa è la ragione per la quale alle impedenze si dà anche il nome di *operatori di impedenza* e le si indica con il punto in alto invece che col tratto.
L'impedenza dei bipoli più complessi ha, in generale, sia la parte reale che la parte immaginaria diversa da zero.
L'inverso dell'impedenza $\dot{Y} = 1/\dot{Z}$ prende il nome di *ammettenza* del bipoli. Sia l'impedenza che l'ammettenza dipendono dalla pulsazione ω.
Una volta definite le impedenze, le equazioni circuitali nel dominio dei fasori possono essere interpretate come le equazioni di un circuito ausiliario di natura "simbolica" così definito:
- ☞ il grafo del circuito simbolico coincide con il grafo del circuito in regime sinusoidale in esame;
- ☞ ad ogni bipolo lineare elementare corrisponde un "bipolo simbolico" avente impedenza corrispondente, come definito in precedenza;
- ☞ ad ogni generatore di tensione indipendente sinusoidale con tensione $e_k(t)$ corrisponde un "generatore di tensione simbolico" indipendente, con fasore $\bar{E}_k$, e ad ogni generatore di corrente indipendente sinusoidale con intensità di corrente $j_h(t)$ corrisponde un "generatore di corrente simbolico" indipendente, con fasore $\bar{J}_h$.



POTENZA ED ENERGIA IN REGIME SINUSOIDALE: conservazione potenze complesse

Siano $v(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha)$ ed $i(t) = I_m \cos(\omega t + \beta)$ la tensione e l'intensità di corrente di un generico bipolo di un circuito in regime sinusoidale, con la convenzione dell'utilizzatore. La potenza elettrica istantanea assorbita ha l'espressione:

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \alpha)\, cos(\omega t + \beta).$$

Se a questa espressione applichiamo l'identità trigonometrica

$$2\cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(\mathrm{x} - \mathrm{y})$$

abbiamo:

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos(\alpha - \beta) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)].$$

Dunque, la potenza elettrica istantanea assorbita da un generico bipolo in regime sinusoidale è la somma di *un termine costante* e di *un termine sinusoidale a pulsazione* 2ω. È quindi anch'essa una funzione periodica, ma di periodo $T/2$.

POTENZA MEDIA

Una grandezza molto significativa per i circuiti in regime sinusoidale è la *potenza media* assorbita da un bipolo. Essa è definita come il valor medio sul periodo T della potenza istantanea assorbita:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(\tau)d\tau\,.$$

Applicando a questa uguaglianza le opportune sostituzioni, otteniamo:

$$P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\alpha - \beta).$$

Dunque, la potenza media assorbita è proprio uguale al termine costante della potenza istantanea. Infatti il valore medio del termine oscillante della potenza istantanea $p(t)$ è uguale a zero perchè esso è una funzione sinusoidale di periodo $T/2$.

La potenza media dipende non solo dalle ampiezze massime della tensione e dell'intensità di corrente, ma anche dalla differenza delle loro fasi, attraverso il fattore "$\cos(\alpha - \beta)$", a cui si da il nome di *fattore di potenza* e che spesso è indicato con "$\cos\varphi$".

Nel S.I. l'unità di misura della potenza elettrica media assorbita è la stessa della potenza istantanea, cioè il *watt* (W).

Consideriamo ora l'energia assorbita dal bipolo in regime sinusoidale, nell'intervallo di tempo $(0, \hat{t})$. Essa ha l'espressione:

$$w(0, \hat{t}) = \int_0^{\hat{t}} p(\tau)d\tau = (nT)P + \int_{nT}^{nT+\Delta t} p(\tau)d\tau\,,$$

dove n è il numero di periodi T contenuti nell'intervallo di tempo $(0, \hat{t})$. Se $n \gg 1$ il contributo dovuto all'energia assorbita nell'intervallo di tempo $(nT, nT + \Delta t)$ è trascurabile rispetto a $(nT)P$, ed in questo caso possiamo scrivere:

$$w(0, \hat{t}) \cong (nT)P \cong \hat{t}P.$$

Nei sistemi operanti in regime sinusoidale si usa come unità di misura per l'energia elettrica il *chilowattora*[4] (kWh).

POTENZA COMPLESSA

La potenza media assorbita da un generico bipolo in regime sinusoidale può essere espressa direttamente in termini dei fasori della tensione ($\bar{V} = V_m e^{j\alpha}$) e dell'intensità di corrente ($\bar{I} = I_m e^{j\beta}$). Infatti, dalla formula della potenza media assorbita, si ha immediatamente

$$P = Re\left\{\frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^*\right\}.$$

L'espressione

$$\hat{P} = \frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^*$$

è chiamata *potenza complessa* assorbita dal bipolo in regime sinusoidale.

Posto

$$Q = Im\{\hat{P}\}\,,$$

abbiamo

$$\hat{P} = P + jQ\,.$$

Alla parte reale della potenza complessa, cioè alla potenza media, si da il nome di *potenza attiva*.

La parte immaginaria della potenza complessa è chiamata *potenza reattiva*.

---

[4] 1kWh è l'energia elettrica assorbita (o erogata) nell'intervallo di un'ora da un bipolo operante in regime sinusoidale quando assorbe (o eroga) 1kW di potenza media.

Al contrario della potenza media, la potenza reattiva non ha alcun significato fisico. La sua espressione è:

$$Q = \frac{1}{2} V_m I_m \sin(\alpha - \beta) .$$

CONSERVAZIONE DELLE POTENZE COMPLESSE

La potenza complessa, pur non avendo nel suo insieme un significato fisico, gode ugualmente di un'importante proprietà: *la somma delle potenze elettriche complesse assorbite dagli elementi di un circuito di impedenze è uguale a zero. Dunque la potenza complessa si conserva e, con essa, la sua parte reale e la sua parte immaginaria.* In altri termini, considerato un circuito di impedenze con l bipoli, ed indicando con $\hat{P}_k$ la potenza complessa assorbita dal *k-esimo* bipolo, si ha che:

$$\sum_{k=1}^{l} \hat{P}_k = 0 .$$

Utilizzando la convenzione dell'utilizzatore su ogni bipolo, si ha $\hat{P}_k = \frac{1}{2} \bar{V}_k \bar{I}_k^*$.
Sostituendo si ottiene:

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{2} \bar{V}_k \bar{I}_k^* = 0 .$$

La dimostrazione di questa proprietà si basa su due fatti: i fasori rappresentativi delle tensioni e delle intensità di corrente verificano le equazioni di Kirchhoff al pari delle corrispondenti grandezze nel dominio del tempo; i complessi coniugati[5] dei fasori delle intensità di corrente verificano la LKC:

$$\sum_{k} (\pm) \bar{I}_k^* = 0 .$$

Ciò è una diretta conseguenza del fatto che:

$$\sum_{k} (\pm) \bar{I}_k = 0 .$$

Infatti, considerata una qualsiasi somma di numeri complessi, se essa è nulla allora devono annullarsi, separatamente, le somme delle rispettive parti reali e di quelle immaginarie. Dunque, anche la somma dei corrispondenti complessi coniugati non potrà che essere identicamente nulla.
Oltre alla potenza complessa è possibile definire anche la *potenza complessa virtuale*, per la quale vale (ancora una volta) il teorema di Tellegen, analogamente a come dimostrato per le potenze virtuali istantanee.

$$\sum_{k=1}^{l} P_k + j \sum_{k=1}^{l} Q_k = 0 ,$$

e quindi come corollario della conservazione delle potenze complesse si ha:
"la somma delle potenze elettriche medie assorbite da tutti gli elementi del circuito è uguale a zero (<u>conservazione delle potenze medie</u>):"

$$\sum_{k=1}^{l} P_k = 0,$$

"la somma delle potenze reattive assorbite da tutti gli elementi del circuito è uguale a zero (<u>conservazione delle potenze reattive</u>):"

$$\sum_{k=1}^{l} Q_k = 0.$$

Pertanto la conservazione della potenza elettrica complessa non solo implica la conservazione della potenza media, ma anche la conservazione della potenza reattiva. Di conseguenza, se un certo elemento di un circuito assorbe potenza reattiva, allora ci deve essere almeno un alto elemento del circuito che deve erogarla.
Va osservato infine, che la potenza apparente, essendo una grandezza definita positiva, non verifica alcuna proprietà di conservazione.

BIPOLI IN REGIME SINUSOIDALE E DIAGRAMMI FASORIALI

Per poter ben operare con i fasori è invalsa l'abitudine di utilizzare la rappresentazione grafica degli stessi come vettori del piano complesso per meglio visualizzare alcune situazioni e proprietà. Si parla in tal caso di *diagrammi fasoriali*.
Il fasore $\bar{A}$ nel piano complesso, è rappresentato da un segmento orientato, congiungente l'origine del piano con il punto di coordinate rettangolari (x, y) o coordinate polari (A_m, α).

[5] Sia z il numero complesso $x + jy$. Si chiama *complesso coniugato* di z, e lo si indica con z^*, il numero complesso $x - jy$. La fase di un complesso conugato è uguale all'opposto della fase del numero complesso ad esso corrispondente, cioè: $\arg(z^*) = -\arg(z)$.

Le equazioni di Kirchhoff e le equazioni caratteristiche nel dominio simbolico possono essere espresse graficamente utilizzando proprio i vettori del piano complesso usati per rappresentare i fasori.

RESISTORE
Per il resistore (convenzione dell'utilizzatore) si ha:

$$V_m = RI_m \text{ e } \beta = \alpha.$$

Se $R > 0$: l'impedenza $\dot{Z} = R$ del resistore è *reale*, la sua fase è nulla e $\bar{V}$ ha la stessa fase di $\bar{I}$.
Il fasore della tensione di un resistore passivo è in fase con quello dell'intensità di corrente.
Osserviamo che quando l'intensità della corrente è massima (o minima) anche la tensione è massima (o minima). Ciò è conseguenza del fatto che i fasori della tensione e dell'intensità di corrente sono in fase tra loro.
Siccome $\alpha - \beta = 0$ la potenza complessa assorbita da un resistore passivo ha la parte reale maggiore di zero e parte immaginaria sempre nulla; dunque la potenza reattiva assorbita da un resistore è sempre uguale a zero. La potenza media può essere espressa come:

$$P = \frac{V_m I_m}{2} = \frac{RI_m^2}{2} = \frac{V_m^2}{2R}.$$

INDUTTORE
L'impedenza dell'induttore è puramente immaginaria e può essere espressa come:

$$\dot{Z}_L = jX_L,$$

dove:

$$X_L = \omega L,$$

è la cosiddetta *reattanza* dell'induttore. La reattanza di un induttore passivo ($L > 0$) è positiva. Dalla relazione caratteristica dell'induttore si ha:

$$V_m = X_L I_m, \qquad \alpha = \beta + \frac{\pi}{2}.$$

La reattanza dell'induttore cresce linearmente al crescere della pulsazione. Per $\omega \to 0$, essa tende a zero e il comportamento dell'induttore tende a quello del corto circuito; invece per $\omega \to \infty$ essa diverge e il comportamento dell'induttore tende a quello del circuito aperto.
Il fasore rappresentativo della tensione di un induttore passivo è in anticipo di $\pi/2$ rispetto a quello dell'intensità di corrente.
Quando l'intensità della corrente cresce nel tempo la tensione è positiva; quando l'intensità della corrente decresce nel tempo la tensione è negativa. Inoltre, quando l'intensità della corrente è massima o minima la tensione è nulla, e viceversa.
La parte reale della potenza complessa assorbita dall'induttore è sempre uguale a zero perché $\alpha - \beta = \pi/2$. Di conseguenza, la potenza media assorbita da un induttore è sempre nulla. La potenza reattiva assorbita è *positiva* e vale:

$$Q_L = \frac{V_m I_m}{2} = \frac{X_L I_m^2}{2} = \frac{V_m^2}{2X_L}.$$

CONDENSATORE
L'impedenza del condensatore è puramente immaginaria e può essere espressa come:

$$\dot{Z}_C = jX_C,$$

dove:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C},$$

è la cosiddetta reattanza del condensatore. La reattanza di un condensatore passivo ($C > 0$) è sempre negativa. Allora dalla relazione caratteristica del condensatore si ha:

$$V_m = |X_C| I_m, \qquad \alpha = \beta - \frac{\pi}{2}.$$

La reattanza del condensatore è inversamente proporzionale alla pulsazione. Per $\omega \to 0$ la reattanza del condensatore diverge e il suo funzionamento tende a quello del circuito aperto; per $\omega \to \infty$ la reattanza tende a zero e il condensatore si comporta come un corto circuito.
Il fasore rappresentativo della tensione di un condensatore è in ritardo di $\pi/2$ rispetto a quello dell'intensità di corrente.
Quando la tensione cresce nel tempo, l'intensità di corrente è positiva; invece, quando decresce, l'intensità di corrente è negativa. Inoltre, quando la tensione è massima o minima, l'intensità della corrente è nulla, e viceversa.
La parte reale della potenza complessa assorbita è sempre nulla perché $\alpha - \beta = -\pi/2$. Di conseguenza la potenza media assorbita dal condensatore è uguale a zero. La potenza reattiva assorbita è *negativa* e vale:

$$Q_C = -\frac{V_m I_m}{2} = \frac{X_C I_m^2}{2} = \frac{V_m^2}{2X_C}.$$

GENERATORI

La tensione di un generatore ideale di tensione è indipendente dalla sua intensità di corrente, mentre l'intensità di corrente di un generatore ideale di corrente è indipendente dalla tensione ai suoi terminali. Ciò naturalmente rimane vero per i fasori corrispondenti. Di conseguenza non è possibile prevedere nulla circa la potenza complessa assorbita da un generatore ideale e, quindi, il segno della potenza media e della potenza reattiva, se non si specifica il circuito a cui il generatore è collegato. Nelle condizioni di funzionamento in cui il generatore di tensione eroga effettivamente energia elettrica, la potenza media assorbita risulterà minore di zero e, quindi, quella erogata maggiore di zero.

CIRCUITI RC, RL, RLC E RISONANZA

BIPOLO RC SERIE

Si consideri il bipolo in regime sinusoidale costituito da un resistore di resistenza R ed un condensatore di capacità C collegati in serie. L'impedenza di questo bipolo è:

$$\dot{Z}_{RC} = R - \frac{j}{\omega C}.$$

Per $\omega \to 0$ la parte immaginaria, e dunque il modulo dell'impedenza, tende ad ∞ ed il bipolo si comporta come se fosse un circuito apertop. Invece per $\omega \to \infty$ la parte immaginaria tende a zero ed il comportamento del bipolo è equivalente ad un resistore di resistenza R. Posto:

$$\tau_{RC} = RC,$$

si ha che per $\omega \ll 1/\tau_{RC}$ la parte immaginaria di $\dot{Z}_{RC}$ è molto più grande di quella reale. In queste condizion il bipolo si comporta come se il resistore non ci fosse. Per $\omega \gg 1/\tau_{RC}$ si ha che il bipolo si comporta come se il condensatore non ci fosse.

L'espressione del modulo dell'impedenza $\dot{Z}_{RC}$ vale:

$$Z_{RC} = R\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau_{RC})^2}},$$

quella della fase è:

$$\varphi_{RC} = -\arctan\left(\frac{1}{\omega\tau_{RC}}\right).$$

Il modulo di $\dot{Z}_{RC}$ decresce con andamento monotono al crescere della pulsazione mentre la fase cresce con andamento monotono: per $\omega \to 0$ si ha $Z_{RC} \to \infty$ e $\varphi_{RC} \to -\pi/2$; per $\omega \to \infty$ si ha $Z_{RC} \to R$ e $\varphi_{RC} \to 0$.

*La tensione $\bar{V}$ della serie RC è in **ritardo** di* $\arctan(1/\omega\tau_{RC})$ *rispetto all'intensità di corrente $\bar{I}$.*

Il valore del fattore di potenza $\cos\varphi_{RC}$è compreso tra zero e uno. Di conseguenza, la potenza complessa assorbita ha parte reale e parte immaginaria diverse da zero. La potenza media assorbita è maggiore di zero e la potenza reattiva assorbita è minore diu zero perchè $\varphi_{RC} > 0$. Le loro espressioni sono:

$$P = \frac{1}{2} R I_m^2,$$

$$Q = -\frac{1}{2}\frac{I_m^2}{\omega C}.$$

Consideriamo la relazione tra le tensioni dei singoli elementi della serie e la tensione totale della serie $\bar{V}$. Applicando la formula del partitore di tensione si ha per la tensione del condensatore:

$$\bar{V}_C = \bar{V}\frac{1}{j\omega\tau_{RC} + 1},$$

e per la tensione del resistore:

$$\bar{V}_R = \bar{V}\frac{j\omega\tau_{RC}}{j\omega\tau_{RC} + 1}.$$

La tensione del condensatore tende alla tensione della serie, $\bar{V}$, per $\omega \to 0$ ed a zero per $\omega \to \infty$, mentre quella del resistore tende a quella della serie, $\bar{V}$, per $\omega \to \infty$ ed a zero per $\omega \to 0$.

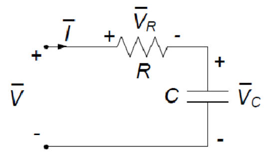
BIPOLO RL SERIE

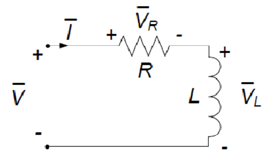
Si consideri il bipolo in regime sinusoidale costituito da un resistore di resistenza R ed un induttore di induttanza L collegati in serie. L'impedenza di questo bipolo è:

$$\dot{Z}_{RL} = R + j\omega L.$$

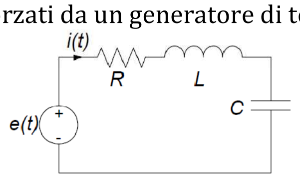
Per $\omega \to \infty$ la parte immaginaria di $\dot{Z}_{RL}$ prevale su quella reale: il bipolo si comporta come se fosse un circuito aperto. Invece, per $\omega \to 0$ la parte immaginaria tende a zero ed il comportamento del bipolo è equivalente a quello di un resistore di resistenza R. Posto:

$$\tau_{RL} = \frac{L}{R}$$
si ha che per $\omega \ll 1/\tau_{RL}$ la parte reale di $\dot{Z}_{RL}$ è molto più grande di quella immaginaria. In queste condizioni il bipolo si comporta come se l'induttore non ci fosse. Per $\omega \gg 1/\tau_{RL}$ il bipolo si comporta come se il resistore non vi fosse.
Il modulo dell'impedenza $\dot{Z}_{RL}$ è:
$$Z_{RL} = R\sqrt{1 + (\omega\tau_{RL})^2},$$
e la sua fase è data dall'espressione:
$$\varphi_{RL} = \arctan(\omega\tau_{RC}).$$
Il modulo e la fase di $\dot{Z}_{RL}$ crescono con andamento monotono al crescere della pulsazione: per $\omega \to 0$ si ha $Z_{RL} \to R$ e $\varphi_{RL} \to 0$; per $\omega \to \infty$ si ha che $Z_{RL} \to \infty$ e $\varphi_{RL} \to +\pi/2$.
*Il fasore rappresentativo della tensione della serie RL è in **anticipo** di* $\arctan(\omega\tau_{RC})$ *rispetto al fasore rappresentativo dell'intensità di corrente.*
Il valore del fattore di potenza $\cos\varphi_{RL}$ è compreso tra zero e uno. Di conseguenza, la potenza complessa assorbita ha parte reale e parte immaginaria diverse da zero. La potenza media assorbita è maggiore di zero e può essere espressa come
$$P = \frac{1}{2} R I_m^2.$$
La potenza reattiva assorbita è sempre maggiore di zero perché $\varphi_{RL} > 0$ ed è data dall'espressione:
$$Q = \frac{1}{2} \omega L I_m^2.$$
Consideriamo la relazione tra le tensioni dei singoli elementi della serie e la tensione totale della serie $\bar{V}$. Applicando la formula del partitore di tensione si ha per la tensione dell'induttore:
$$\bar{V}_L = \bar{V} \frac{j\omega\tau_{RL}}{j\omega\tau_{RL} + 1},$$
e per la tensione del resistore:
$$\bar{V}_R = \bar{V} \frac{1}{j\omega\tau_{RL} + 1}.$$
La tensione dell'induttore tende alla tensione della serie, $\bar{V}$, per $\omega \to \infty$ ed a zero per $\omega \to 0$, mentre quella del resistore tende a quella della serie, $\bar{V}$, per $\omega \to 0$ ed a zero per $\omega \to \infty$.





CIRCUITI RLC E RISONANZA
Il circuito RLC è costituito da un resistore di resistenza R, un condensatore di capacità C ed un induttore di induttanza L, tutti passivi, collegati in serie, forzati da un generatore di tensione sinusoidale $e(t) = E_m \cos\omega t$.



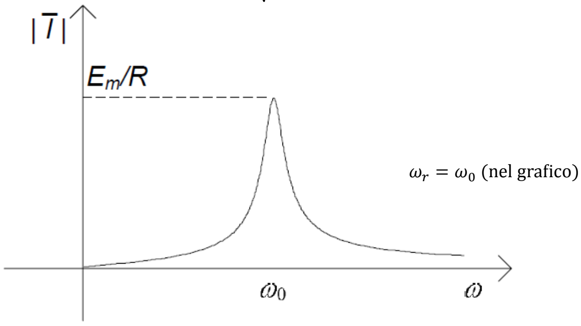
Posto $i(t) = I_m\, cos(\omega t + \varphi)$ e considerato il corrispondente fasore $\bar{I} = I_m e^{j\varphi}$, abbiamo:
$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_{eq}} = \frac{E_m}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)},$$
dove $\bar{E} = E_m$ è il fasore rappresentativo della tensione del generatore e $\dot{Z}_{eq}$ è l'impedenza equivalente della rie RLC. È immediato ricavare l'espressione dell'ampiezza dell'intensità di corrente:
$$I_m(\omega) = |\bar{I}(\omega)| = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$
nonché quella per la fase:
$$\varphi(\omega) = -\arctan\left[\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}\right].$$

Esse risultano funzioni della pulsazione ω. Vogliamo dunque considerarne gli andamenti al variare di ω. È infatti concettualmente possibile concepire un esperimento in cui l'ampiezza del generatore sinusoidale è fissata e la pulsazione, invece, viene cambiata.
È immediato verificare che $I_m(\omega)$ tende a zero per $\omega \to 0$ e per $\omega \to \infty$ essa assume il massimo in corrispondenza della pulsazione ω_r, caratteristica del circuito, per la quale:

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}.$$

Essa prende il nome di *pulsazione di risonanza del circuito* e vale:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$



Quando la pulsazione del generatore è uguale alla pulsazione di risonanza, si dice che il generatore è in *risonanza* con il circuito.
Alla risonanza il fasore dell'intensità di corrente $\bar{I}(\omega_r)$ vale

$$\bar{I}(\omega_r) = \frac{\bar{E}}{R}.$$

Esso risulta pari a quello che si avrebbe se nel circuito fosse presente solo il resistore R.
Per $\omega \to 0$ il modulo dell'impedenza $\dot{Z}_{eq}$ tende all'infinito, perchè tende all' infinito il modulo della reattanza del condensatore; per $\omega \to \infty$ il modulo dell'impedenza tende di nuovo all'infinito, perché ora la è reattanza dell'induttore che tende all'infinito. In corrispondenza della pulsazione di risonanza la parte immaginaria di $\dot{Z}_{eq}$è nulla, perchè la reattanza del condensatore è opposta a quella dell'induttore e quindi il modulo di $\dot{Z}$ assume valore minimo.
Per $\omega \leq \omega_r$ la fase è positiva, cioè il fasore dell'intensità di corrente è in anticipo rispetto a quello della tensione applicata: per $\omega \to 0$ si ha $\varphi \to \pi/2$.
Per $\omega \geq \omega_r$ la fase è negativa, cioè il fasore dell'intensità di corrente è in ritardo rispetto a quello della tensione applicata: per $\omega \to \infty$ si ha $\varphi \to -\pi/2$.
Per $\omega = \omega_r$ l'intensità di corrente è in fase con la tensione applicata, perchè l'impedenza equivalente è puiramente reale, essendo nulla la parte immaginaria.

CURVE UNIVERSALI DI RISONANZA

I diagrammi dell'ampiezza della fase del fasore rappresentativo dell'intensità di corrente del circuito RLC serie possono essere posti in una forma adimensionale piuttosto generale, che li rende indipendenti dal particolare circuito considerato. Consideriamo anzitutto l'espressione di $I_m(\omega)$, vista sopra, e normalizziamola al suo valore massimo $|\bar{I}(\omega)| = E_m/R$:

$$\frac{|\bar{I}(\omega)|}{|\bar{I}(\omega_r)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega C R}\right)^2}}.$$

Introducendo la pulsazione normalizzata $\Omega = \omega/\omega_r$, possiamo riscrivere l'espressione appena definita come:

$$\frac{|\bar{I}(\omega)|}{|\bar{I}(\omega_r)|} = |X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)^2}}.$$

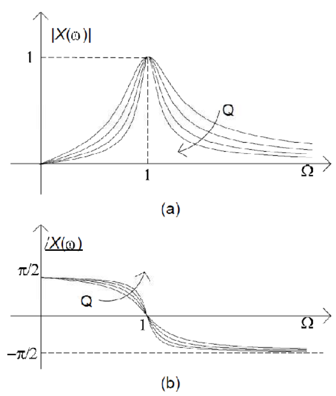


Figura 5.30. Curve universali di risonanza: (a) modulo; (b) fase (la freccia indica valori crescenti del fattore di qualità Q)

Le curve così definite al variare dell'ampiezza del parametro Q, vendono dette *curve universali di risonanza*: è infatti possibile mostrare che, a patto di definire opportunamente il fattore Q, anche per il circuito RLC parallelo si previene a tale formula. In modo analogo è possibile rielaborare la stessa in fase.

Le curve dell'ampiezza divengono via via più strette all'aumentare di Q e, dunque, il funzionamento del circuito è più "selettivo" in frequenza. Per quanto riguarda le curve della fase, all'aumentare di Q, la transizione attorno a zero si fa sempre più brusca.

SOVRAPPOSIZIONE DI REGIMI STAZIONARIO E SINUSOIDALE

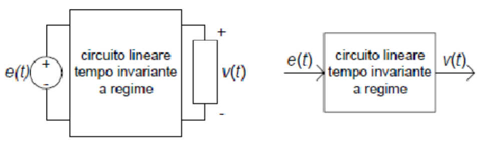
Consideriamo un circuito lineare (tempo invariante) a regime forzato, ad esempio, da due generatori indipendenti di tensione, uno sinusoidale con pulsazione ω e l'altro stazionario. Per la linearità, i due generatori impongono al circuito un regime permanente dato dalla sovrapposizione dei regimi che ciascun generatore imporrebbe se agisse da solo: il regime stazionario imposto dal generatore stazionario e quello sinusoidale a pulsazione ω imposto dal generatore sinusoidale. Ciò è una diretta conseguenza del fatto che le equazioni del circuito, sia quelle algebriche che quelle differenziali, sono lineari ed i termini dovuti ai due generatori compaiono come termini noti.
Per trovare la soluzione di regime consideriamo due circuiti ausiliari C' e C'' ottenuti spegnendo un generatore per volta. In particolare, il circuito ausiliario C' risulta in regime stazionario mentre quello C''in regime sinusoidale. Il circuito ausiliario C' può essere risolto con la tecnica classica per la sintesi dei circuiti stazionari, quando il transitorio si è completamente estinto; il circuito C'', essendo in regime sinusoidale, può essere risolto col metodo dei fasori.
Indichiamo con $i'_k = I_k$ e $v'_k = V_k$ l'intensità di corrente e la tensione del k-esimo bipolo del circuito C' e con $i''_k = I_{mk}\cos(\omega t + \beta)$ e $v''_k = V_{mk}\cos(\omega t + \alpha)$ quelle del circuito C''.
Applicando la sovrapposizione degli effetti, la soluzione di regime del circuito C è data da :
$$i_k(t) = i'_k(t) + i''_k(t); \;\; v_k(t) = v'_k(t) + v''_k(t).$$
Sostituendo le precedenti espressioni in questa si ottiene:
$$i_k(t) = I_k + I_{mk}\, cos(\omega t + \beta); \;\;\; v_k(t) = V_k + V_{mk}\, cos(\omega t + \alpha)\,.$$
Come si vede, il regime non è più sinusoidale, ma periodico: il periodo è quello imposto dal generatore sinusoidale $T = 2\pi/\omega$.
La potenza istantanea $p_k(t)$ assorbita dal k-esimo bipolo sarà:
$$p_k(t) = v_k(t) \cdot i_k(t) = [V_k + V_{mk}\, cos(\omega t + \alpha)][I_k + I_{mk}\, cos(\omega t + \beta)].$$
Per la potenza istantanea *non vale* la proprietà della sovrapposizione degli effetti. Tale espressione, difatti, non corrisponde alla somma delle potenze istantanee assorbite dal k-esimo bipolo nel circuito C' e nel circuito C''. Essa è comunque una funzione periodica con periodo $T = 2\pi/\omega$.
Consideriamo ora il suo valor medio $\langle p_k(t)\rangle$ nel suo periodo T. Si ottiene subito:
$$\langle p_k(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T p_k(\tau)\, d\tau = V_k I_k + \frac{1}{2} V_{mk} I_{mk} \cos(\alpha_k - \beta_k).$$
Questo è un risultato molto importante: la potenza media $\langle p_k(t)\rangle$ risulta proprio uguale alla somma delle potenze medie assorbite dal k-esimo bipolo nel regime stazionario del circuito C' e nel regime sinusoidale del circuito C''.

ANALISI IN FREQUENZA DI UN CIRCUITO

Si consideri un circuito con un solo generatore lineare (indipendente). Se si fa in modo che l'ampiezza della tensione (o dell'intensità di corrente) del generatore sinusoidale di tensione (o di corrente) rimanga costante e si fa variare la pulsazione del generatore stesso, si ottiene la cosiddetta *risposta in frequenza del circuito*. Essa può essere considerata come la descrizione del comportamento in regime sinusoidale in funzione dalla pulsazione.
La risposta in frequenza risulta importante per molte applicazioni, in particolare nell'elettronica e nelle telecomunicazioni. Un'applicazione specifica si ha, ad esempio, nei filtri, che sono circuiti in grado di attenuare fortemente o eliminare segnali a frequenze indesiderate, lasciando invece inalterati i segnali alle frequenze di interesse. Sono utilizzati nei sistemi radio-televisivi, telefonici e di trasmissione dati per separare il canale di interesse da tutti quelli che sono contemporaneamente trasmessi e che, quindi, potrebbero generare interferenza.

RISPOSTA IN FREQUENZA

Consideriamo un circuito lineare tempo invariante in regime permanente con un solo generatore ideale (indipendente), ad esempio di tensione $e(t)$, e descriviamolo come un *sistema ingresso-uscita*. La tensione del generatore $e(t)$ svolge il ruolo di *ingresso*, mentre un'altra tensione svolge il ruolo di grandezza di *uscita*.
La tensione $v(t)$ è la *risposta* a regime del circuito al segnale $e(t)$.



L'ipotesi di avere un solo generatore non è restrittiva. Difatti, siccome per i circuiti lineari a regime vale la sovrapposizione degli effetti, il caso più generale in cui sono presenti più ingressi può essere ricondotto allo studio di circuiti a regime con un solo generatore.

Si assuma che il "segnale" in ingresso $e(t)$, definito per $-\infty < t < +\infty$, sia rappresentabile attraverso la *somma discreta* di armoniche:

$$e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \gamma_0) + E_1 \, cos(\omega_1 t + \gamma_1) + \dots + E_n \, cos(\omega_n t + \gamma_n),$$

dove $E_0, E_1, \dots, E_n$ e $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono rispettivamente l'ampiezza e la fase delle singole componenti armoniche con pulsazioni $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ che costituiscono il segnale.
Osserviamo subito che se

$$\omega_h = h\omega_0, \qquad h = 0,1,2, \dots, n,$$

$e(t)$ è una funzione periodica di periodo $T = 2\pi/\omega_0$, cioè $e(t) = e(t + T)$ per ogni valore di t.
La somma armonica può essere estesa ad un numero infinito di termini. Quando il numero di termini è infinito e il periodo vale $T = 2\pi/\omega_0$, allora la somma armonica sopra descritta diventa una serie di Fourier.
Indichiamo con $v_n(t)$ la risposta a regime che si avrebbe se il generico termine sinusoidale $E_n \cos(\omega t + \gamma_n)$ nella somma di cui sopra fosse presente da solo; quindi $v_n(t)$ è una funzione sinusoidale. Per la linearità la risposta a regime $v = v_n(t)$ all'ingresso $e = e_n(t)$ dato dalla somma è uguale alla somma delle risposte a regime $v_n(t)$ che si avrebbero se i singoli termini $E_h \cos(\omega_n t + \gamma_n)$ agissero da soli, quindi:

$$v(t) = v_0(t) + v_1(t) + \dots + v_n(t) + \cdots.$$

È evidente che è sufficiente conoscere la risposta a regime quando l'ingresso è una generica funzione sinusoidale:

$$e(t) = Ecos(\omega t + \gamma),$$

per ogni valore della pulsazione ω per poter calcolare tutti i termini di $v(t)$. In questo modo la soluzione del problema è ricondotta allo studio di un circuito in regime sinusoidale al variare della pulsazione.
Il circuito in esame può essere analizzato al variare di ω utilizzando il metodo dei fasori. Il fasore rappresentativo della tensione in ingresso è:

$$\bar{E} = Ee^{j\gamma}.$$

Indichiamo con:

$$\bar{V} = Ve^{j\beta}$$

Il fasore della grandezza d'uscita e il fasore della grandezza di ingresso

$$H(j\omega) = \frac{\bar{V}}{\bar{E}}$$

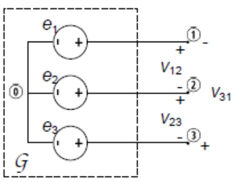
è, in generale, una grandezza complessa indipendente dal fasore di ingrasso e dal fasore di uscita (per la linearità del circuito di impedenze). Una volta fissate le grandezze di ingresso e uscita, H dipende solo dalla costituzione del circuito in esame e dalla pulsazione. Alla funzione complessa $H = H(j\omega)$ di variabile si dà il nome di *funzione di rete* del circuito. Attraverso di essa si descrive la *risposta in frequenza* del circuito.
Poniamo:

$$H(j\omega) = Ae^{j\varphi(\omega)}.$$

Il modulo della funzione di rete $A = A(\omega)$ prende il nome di *risposta in ampiezza* ed il suo argomento $\varphi = \varphi(\omega)$, prende il nome di *risposta in fase*.
Deduciamo, quindi, che è possibile misurare la risposta in ampiezza e la risposta in fase di un circuito a regime applicando in ingresso un generatore sinusoidale, misurando la grandezza di uscita quando il circuito è a regime sinusoidale, cioè dopo che il transitorio si è esaurito e ripetendo le misure per diversi valori delle frequenze del generatore. Gli apparati di misura che realizzano in maniera automatica queste operazioni prendono il nome di *analizzatori di spettro*.

SISTEMI TRIFASE

La produzione, il trasporto e spesso l'utilizzo dell'energia elettrica sono basati sui *sistemi trifase*.
Un generatore di tensione sinusoidale di un sistema di potenza prende il nome di *generatore monofase*. Oltre ai generatori monofase, nei sistemi di potenza in regime sinusoidale sono molto diffusi i *generatori trifase*. Possiamo immaginare di collegare tre generatori monofase sinusoidali ed isofrequenziali ad una stella o ad un triangolo, realizzando in questo modo un tripolo.



Le tensioni $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$, sono di fatto i potenziali dei nodi 1, 2 e 3, avendo assunto come riferimento per i potenziali il nodo interno 0.
Ad esse si dà il nome di *tensioni stellate* del generatore. Alle tre tensioni $v_{12}(t), v_{23}(t), v_{31}(t)$, si da il nome di *tensioni concatenate*. Per esse si ha:

$$v_{12} = e_1 - e_2,$$

$$v_{23} = e_2 - e_3,$$
$$v_{31} = e_3 - e_1.$$

Le tre tensioni stellate sono tra loro indipendenti, invece le tre tensioni concatenate non sono indipendenti tra loro: per la LKT la loro somma deve essere uguale a zero:

$$v_{12} + v_{23} + v_{31} = 0.$$

SISTEMI TRIFASE SIMMETRICI E SQUILIBRATI

Il tripolo considerato prende il nome di *generatore sinusoidale trifase simmetrico* di tensione se:

$$e_1(t) = E_m \cos(\omega t + \alpha),$$
$$e_2(t) = E_m \cos(\omega t + \alpha - 2\pi/3),$$
$$e_3(t) = E_m \cos(\omega t + \alpha - 4\pi/3).$$

I fasori rappresentativi delle tensioni stellate sono:

$$\bar{E}_1 = E_{eff} e^{j\alpha},$$
$$\bar{E}_2 = E_{eff} e^{j(\alpha - 2\pi/3)},$$
$$\bar{E}_3 = E_{eff} e^{j(\alpha - 4\pi/3)},$$

dove:

$$E_{eff} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Per l'insieme delle tensioni stellate vale la relazione

$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0.$$

I fasori rappresentativi delle tensioni concatenate sono:

$$\bar{V}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2 = \sqrt{3}\bar{E}_1 e^{j\pi/6} = \sqrt{3} e^{j(\alpha + \pi/6)},$$
$$\bar{V}_{23} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3 = \sqrt{3}\bar{E}_2 e^{j\pi/6} = \sqrt{3} e^{j(\alpha - \pi/6)},$$
$$\bar{V}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1 = \sqrt{3}\bar{E}_3 e^{j\pi/6} = \sqrt{3} e^{j(\alpha + 5\pi/6)}.$$

Supponiamo ora di avere un generatore che produca una terna simmetrica e diretta di tensioni sinusoidali e connettiamolo ad un tripolo *utilizzatore* rappresentato attraverso una configurazione a stella di tre bipoli di impedenze $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dot{Z}_3$.

Applicando il metodo dei potenziali di nodo, assumendo come riferimento il nodo 0 in comune ai generatore, si ottiene:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{U}_{0'}}{\dot{Z}_1}, \qquad \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2 - \bar{U}_{0'}}{\dot{Z}_2}, \qquad \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3 - \bar{U}_{0'}}{\dot{Z}_3},$$

dove $\bar{U}_{0'}$ è il potenziale del centro stella dell'utilizzatore. Dovendo essere:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0,$$

utilizzando le equazioni di cui sopra ($\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$), si ottienel'espressione per il potenziale $\bar{U}_{0'}$:

$$\bar{U}_{0'} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} + \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}}.$$

Se le tre impedenze $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dot{Z}_3$ sono diverse tra loro, non c'è nessuna relazione tra i fasori rappresentativi delle intensità di corrente: in questo caso si dice che le correnti e l'utilizzatore sono *squilibrati*.

Se $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = \dot{Z}$, essendo $\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0$, si ottiene

$$\bar{U}_{0'} = 0$$

e quindi:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}}, \qquad \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}}, \qquad \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}}.$$

Posto:

$$\dot{Z} = Z e^{j\phi}$$

si ha:

$$\bar{I}_1 = \frac{E_{eff}}{Z} e^{j(\alpha - \phi)}, \qquad \bar{I}_2 = \frac{E_{eff}}{Z} e^{j(\alpha - \phi - 2\pi/3)}, \qquad \bar{I}_3 = \frac{E_{eff}}{Z} e^{j(\alpha - \phi - 4\pi/3)}.$$

Le espressioni delle corrispondenti intensità di corrente nel dominio del tempo sono:

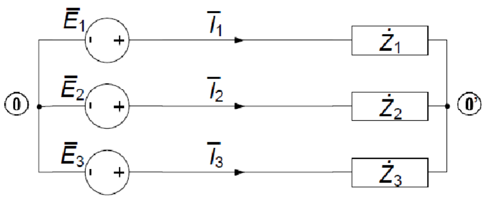
$$i_1(t) = \frac{E_m}{Z}\cos(\omega t + \alpha - \phi),$$
$$i_2(t) = \frac{E_m}{Z}\cos(\omega t + \alpha - \phi - 2\pi/3),$$
$$i_3(t) = \frac{E_m}{Z}\cos(\omega t + \alpha - \phi - 4\pi/3).$$
Quando le tre impedenze sono uguali, le tre correnti costituiscono anch'esse una terna simmetrica diretta. In questo caso si dice che il sistema trifase è *equilibrato* (nelle correnti) e l'utilizzatore è un *utilizzatore equilibrato*.

POTENZA NEI SISTEMI TRIFASE

Vogliamo calcolare la potenza istantanea fornita dal generatore trifase G all'utilizzatore U quando esso è equilibrato. Ricordiamo che, per un generico tripolo, l'espressione della potenza erogata, fatte le dovute convenzioni, è data da:
$$p(t) = i_1(t)e_1(t) + i_2(t)e_2(t) + i_3(t)e_3(t).$$
Sostituendo in essa le espressioni delle tensioni e delle intensità di corrente nel tempo, si ottiene:
$$p(t) = \frac{E_{eff}^2}{Z}[\cos\phi + \cos(2\omega t + 2\alpha - \phi)] +$$
$$\frac{E_{eff}^2}{Z}[\cos\phi + \cos(2\omega t + 2\alpha - \phi - 4\pi/3)] +$$
$$\frac{E_{eff}^2}{Z}[\cos\phi + \cos(2\omega t + 2\alpha - \phi - 8\pi/3)].$$
La somma dei tre termini sinusoidali a pulsazione 2ω è identicamente nulla, quindi anche la potenza istantanea erogata dal generatore trifase è costante nel tempo ed ha espressione:
$$p(t) = 3\frac{E_{eff}^2}{Z}\cos\phi.$$
Pertanto la potenza erogata da un generatore trifase simmetrico, quando il sistema delle correnti è equilibrato, è costante in regime sinusoidale.
In un sistema trifase con utilizzatore equilibrato la potenza trasportata risulta pari a tre volte la potenza media che potremmo trasportare, a parità di tensione E_{eff}, con un sistema monofase.

SISTEMI TRIFASE SQUILIBRATI E FORMULA DI MILLMAN

È piuttosto frequente il caso in cui, o per incompleto bilanciamento degli utilizzatori sulle tre fasi oppure per effetto dei guasti, l'utilizzatore complessivo di un sistema trifase risulti essere squilibrato. È necessario anche in tal caso poter calcolare tutte le grandezze del circuito e ciò può essere fatto in modo agevole nel caso di sistemi con soli tre conduttori. L'applicazione del metodo dei potenziali nodali a tale circuito conduce direttamente alla relazione che esprime la tensione $V_{0'0}$ tra il nodo in comune 0 (centro stella) dei generatori e quello $0'$ degli utilizzatori:
$$\bar{V}_{0'0} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} + \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}}.$$
Questa espressione è anche nota come *formula di Millman* per il calcolo dello *spostamento del centro della stella* di un utilizzatore squilibrato. Essa consente di risolvere rapidamente i casi di utilizzatore squilibrato nell'analisi dei circuiti trifase.



ELEMENTI AD N TERMINALI

È molto frequente imbattersi in elementi circuitali con più di due terminali, detti *N-poli*, dove con N si indica il numero di terminali. Un N-polo è la generalizzazione di un bipolo, nel caso in cui i terminali sono più di due. Esso può essere il modello di un componente con N terminali oppure rappresentare una parte di circuito composta da più elementi e collegata alla restante parte attraverso N terminali. Così come per il bipolo, il funzionamento di un N-polo non dipende dal circuito in cui è inserito.
Fra i diversi possibili elementi con N terminali assumono particolare rilievo i doppi bipoli, i quali oltre a rappresentare possibili modelli equivalenti di parti di circuiti, anche molto complesse, possono essere un adeguato modello circuitale di importanti componenti, quali *trasformatori*, *transistori*, *amplificatori operazionali*, ecc.

LEGGI DI KIRCHHOFF PER GLI N-POLI

È immediato constatare che, una volta scelto un certo insieme di grandezze descrittive, le leggi di Kirchhoff per le tensioni e le intensità di corrente possono essere scritte in modo perfettamente analogo al caso dei circuiti di solo bipoli. Difatti, è possibile considerare, in luogo dell'elemento a più terminali, un sottografo costituito da $N-1$ lati sui quali sono definite le intensità di corrente e le tensioni descrittive, tutti convergenti nel nodo comune che corrisponde al terminale riferito per l'elemento considerato. In tal modo è chiaramente ed univocamente definito come vadano considerate le tensioni per le leggi di Kirchhoff alle maglie e le intensità di corrente per quelle ai nodi.

POTENZA ASSORBITA DAGLI N-POLI

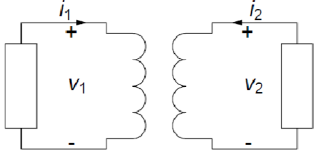
Anche per un elemento con N terminali è possibile introdurre la potenza elettrica assorbita. Scelto un terminale comune, ad esempio il terminale N, possiamo costruire il grafo del N-polo ed introdurre le intensità di corrente e le tensioni descrittive adottando su ogni lato del grafo la convenzione dell'utilizzatore per i versi di riferimento. Nelle ipotesi di funzionamento *lentamente variabile*, la potenza elettrica assorbita dal N-polo è con buona approssimazione data da:

$$p = \sum_{h=1}^{N-1} i_h v_{hN}$$

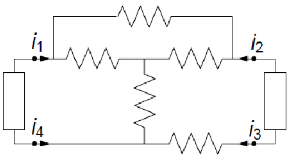
Analogamente a quanto messo in evidenza per i bipoli, questa sommatoria è rigorosamente esatta solo nel regime stazionario.
L'espressione della potenza assorbita si riduce, banalmente, a quella del bipolo se $N = 2$.
Questa sommatoria è indipendente dalla scelta del terminale comune.

DOPPI BIPOLI

In molte applicazioni i terminali di un N-polo possono essere associati a coppie. Ad esempio, in un amplificatore audio la coppia dei terminali di ingresso può essere collegata ad un microfono e la coppia dei terminali di uscita ad un diffusore acustico. Anche i quattro terminali di un trasformatore sono raggruppati in due coppie, generalmente dette "primario" e "secondario".



Può anche accadere che, pur non essendo possibile raggruppare naturalmente i quattro terminali di un elemento in due coppie, essi lo siano per come sono effettivamente collegati al resto del circuito in cui l'elemento è inserito. Se consideriamo il quadripolo rappresentato in figura qui a sinistra, osserviamo che le intensità di corrente verificano le condizioni:



$$i_1 = -i_4;\ i_2 = -i_3.$$

Tali vincoli vengono anche detti *condizioni di porta* e riducono il numero delle intensità di corrente effettivamente indipendenti da tre a due.
Le porte sono coppie di terminali per le quali sono verificate le condizioni di cui sopra.
Un *doppio bipolo* è un elemento circuitale con *due porte*. A ciascuna porta è associata

una tensione ed un intensità di corrente. La prima porta designa la coppia di terminali da sinistra, cosicché la tensione e le intensità di corrente associate a questi terminali saranno marcate con il pedice "1"; analogamente la seconda porta designa la coppia di terminali di destra, sicché la tensione e la intensità di corrente associate a questi terminali saranno marcate con il pedice "2".
Il funzionamento del doppio bipolo è descritto da due relazioni indipendenti tra le due intensità di corrente i_1, i_2 e le due tensioni v_1, v_2, relazioni che dipendono unicamente dalla natura fisica del componente che il doppio bipolo rappresenta.
Il grafo di un doppio bipolo può essere rappresentato da due lati e quattro nodi; esso è *non connesso*. Ciò implica che le tensioni e le intensità di corrente non sono legate tra loro attraverso le leggi di Kirchhoff, ma solo tramite le relazioni caratteristiche del doppio bipolo stesso. Pertanto i grafi dei circuiti che contengono doppi bipoli possono risultare non connessi.
L'espressione della potenza elettrica assorbita da un doppio bipolo è data da:

$$p^{(a)} = v_1 i_1 + v_2 i_2,$$

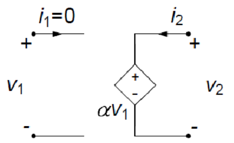
essendo pari alla somma delle potenze elettriche assorbite dalle singole porte.
Classificheremo come *a-dinamici* quei doppi bipoli il cui funzionamento è descritto da relazioni caratteristiche di tipo algebrico; viceversa diremo *dinamici* quelli per i quali ciò non è verificato.

DOPPI BIPOLI LINEARI A-DINAMICI FONDAMENTALI

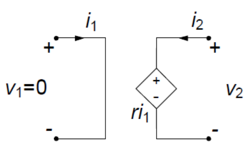
GENERATORI CONTROLLATI LINEARI

I *generatori controllati lineari* sono doppi bipoli a-dinamici lineari: una delle due grandezze (tensione o intensità di corrente) ad una delle due porte è direttamente proporzionale ad una delle due grandezze (tensione o intensità di corrente) all'altra porta.
Per convenzione la porta che funziona da generatore è la porta "2" e la porta che controlla il generatore è la porta "1".
Considerando tutte le possibili combinazioni si hanno i seguenti generatori controllati:

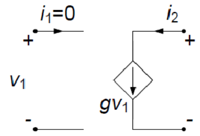
- **Generatore di tensione controllato in tensione**
  è un doppio bipolo lineare definito dalle relazioni caratteristiche
  $$i_1 = 0$$
  $$v_2 = \alpha v_1,$$
  dove α è una costante adimensionale detta *rapporto di trasferimento di tensione*.



- **Generatore di tensione controllato in corrente**
  è un doppio bipolo lineare definito dalle relazioni caratteristiche
  $$v_1 = 0$$
  $$v_2 = rv_1,$$
  dove r è una costante (la cui unità di misura è l'*ohm*) che prende il nome di *trans-resistenza* del generatore.



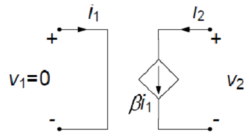
- **Generatore di corrente controllato in tensione**
  è un doppio bipolo lineare definito dalle relazioni caratteristiche
  $$i_1 = 0$$
  $$i_2 = gv_1,$$
  dove g è una costante (la cui unità di misura è il *siemens*) che prende il nome di *trans-conduttanza* del generatore.



☞ **Generatore di corrente controllato in corrente**
è un doppio bipolo lineare definito dalle relazioni caratteristiche

$$v_1 = 0$$
$$i_2 = \beta i_1,$$

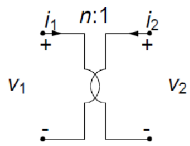
dove β è una costante adimensionale detta *rapporto di trasferimento di corrente.*



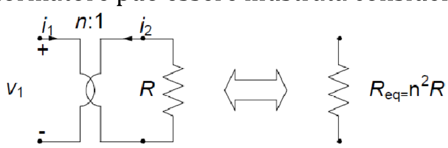
TRASFORMATORE IDEALE
Il *trasformatore ideale* è un doppio bipolo lineare il cui funzionamento è descritto dalle seguenti relazioni:

$$v_1 = nv_2$$
$$i_2 = -ni_1,$$

dove la costante positiva n è detta *rapporto di trasformazione*.
Come si vede da queste equazioni caratteristiche, la proprietà fondamentale è che le grandezze tensioni alla porta "1" e alla porta "2" sono legate tra loro dal rapporto fisso n, ed in modo inverso (ed opposto) le corrispondenti intensità di corrente.



Sostituendo nell'espressione della potenza le relazioni caratteristiche sopraccitate, la potenza elettrica assorbita dal trasformatore ideale è uguale a zero, in qualsiasi condizione di funzionamento. Esso è dunque un doppio bipolo globalmente passivo che non dissipa né immagazzina energia, cioè è *trasparente alla potenza*.
Per il trasformatore ideale non vale la proprietà di non amplificazione, sia delle tensioni che delle intensità di corrente, pur essendo globalmente passivo perché non possiamo dire nulla a priori sul segno della potenza assorbita da una singola porta.
Stante la linearità delle equazioni caratteristiche, in un circuito che contenga trasformatori ideali continua a valere la sovrapposizione degli effetti.
La proprietà più importante del trasformatore può essere illustrata considerando il circuito in figura:



in questo circuito si ha che alla porta "2" è collegato un resistore lineare la cui resistenza è R. In tal caso si ha:

$$v_1 = nv_2 = -nRi_2 = (n^2R)i_1.$$

Quando alla porta "2" del trasformatore ideale è collegato un resistore lineare di resistenza R, la porta "1" si comporta come se fosse un resistore lineare di resistenza equivalente n^2R. Pertanto il trasformatore consente, in senso equivalente, di variare la resistenza di un resistore senza alterarne la costituzione fisica. L'equivalenza che si stabilisce in questo modo viene chiamata "trasporto al primario" della resistenza.
In modo analogo è possibile mostrare come, quando alla porta "2" è collegato un induttore lineare di resistenza L, la porta "1" si comporta come se fosse un induttore di induttanza n^2L. Difatti, basta sostituire la relazione caratteristica dell'induttore $v_2 = -L\frac{di_2}{dt}$ nella prima equazione caratteristica del trasformatore ($v_1 = nv_2$) e poi sostituire nella relazione così ottenuta la seconde equazione caratteristica del condensatore ($i_2 = -ni_1$) per ottenere:

$$v_1 = n^2L\frac{di_1}{dt}.$$

Sulla base di quanto già visto, possiamo affermare che quando un condensatore di capacità C è collegato alla porta "2" di un trasformatore ideale, allora la porta "1" si comporta come se fosse un condensatore di capacità C/n^2.

---

1. Dimostrazione trasporto al primario induttore
Partiamo dall'equazione caratteristica dell'induttore, che è $v = -L\frac{di}{dt}$. In questo caso, essendo l'induttore collegato alla porta "2" del trasformatore e quindi connesso alla tensione v_2 e alla intensità di corrente i_2, abbiamo che l'equzione caratteristica, espressa in funzione di questi due valori sarà: $v_2 = -L\frac{di_2}{dt}$.
Tale valore lo vado a sostituire nella prima equazione caratteristica del trasformatore ideale, cioè in $v_1 = nv_2$

$$\Rightarrow v_1 = -nL\frac{di_2}{dt}$$

essendo $i_2 = (-ni_1)$ dalla seconda equazione caratteristica del trasformatore

$$\Rightarrow v_1 = -nL\frac{d(-ni_1)}{dt}.$$

Eseguo la derivata portando fuori il valore costante $-n$, ottenendo così

$$v_1 = n^2L\frac{di_1}{dt}.$$

Quindi il trasporto a primario di un induttore di induttanza L sarà proprio $\boldsymbol{n^2L}$.

2. Dimostrazione trasporto al primario condensatore
Partiamo dall'equazione caratteristica del condensatore, che è $i = -C\frac{dv}{dt}$. In questo caso, essendo il condensatore collegato alla porta "2" del trasformatore e quindi connesso alla tensione v_2 e alla intensità di corrente i_2, abbiamo che l'equzione caratteristica, espressa in funzione di questi due valori sarà: $i_2 = -L\frac{dv_2}{dt}$.
Tale valore lo vado a sostituire nella seconda equazione caratteristica del trasformatore ideale $i_2 = -ni_1$, che in questo caso andrò a vedere come $i_1 = -i_2/n$:

$$\Rightarrow i_1 = -\frac{C\frac{dv_2}{dt}}{n}$$

essendo $v_1 = nv_2$ e quindi $v_2 = v_1/n$

$$\Rightarrow i_1 = -\frac{C\frac{d\left(\frac{v_1}{n}\right)}{dt}}{n}.$$

Eseguo la derivata portando fuori il valore costante $\frac{1}{n}$, ottenendo così

$$i_1 = -\frac{\frac{C}{n}\cdot\frac{d(v_1)}{dt}}{n} \quad \Rightarrow \quad i_1 = -\frac{C}{n^2}\cdot\frac{d(v_1)}{dt}$$

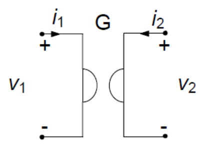
Quindi il trasporto a primario di un condensatore di capacità C sarà proprio $\boldsymbol{C/n^2}$.*

GIRATORE

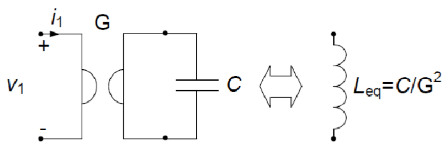
Il *giratore* è un doppio bipolo lineare definito dalle seguenti relazioni:

$$i_1 = Gv_2$$
$$i_2 = -Gv_1,$$

dove la costante G è detta *conduttanza di girazione.* Per i circuiti che contengono, oltre a resistori lineari e generatori indipendenti (reali) anche giratori, continua a valere la sovrapposizione degli effetti.



Anche per il giratore si può verificare che la potenza elettrica assorbita è uguale a zero in qualsiasi condizione di funzionamento, quindi esso è un bipolo globalmente passivo che né dissipa né immagazzina energia (*trasparente alla potenza*). Anche per questo bipolo non valgono le proprietà di non amplificazione.
La proprietà più importante del giratore può essere illustrata considerando il bipolo in figura:



alla porta "2" del giratore è connesso un condensatore lineare tempo-invariante con capacità C. In questo caso si ha:

---

* Il valore ottenuto dalla mia dimostrazione porta il segno negativo, tuttavia la capacità equivalente di un condensatore connesso alla porta "2" di un trasformatore ideale è positiva. Rivedere dimostrazione.

$$v_1 = -\frac{i_2}{G} = \frac{C}{G}\frac{dv_2}{dt} = \frac{C}{G^2}\frac{di_1}{dt} = L_{eq}\frac{di_1}{dt}.$$

Quando alla porta di un giratore è collegato un condensatore lineare e tempo-invariante di capacità C, l'altra porta si comporta come se fosse un induttore lineare e tempo-invariante di induttanza equivalente $L_{eq} = C/G^2$. Pertanto, il giratore, consente di realizzare un bipolo induttore a partire da un condensatore.
Vale anche la proprietà duale: tramite un giratore è possibile realizzare un bipolo condensatore a partire da un induttore.

DOPPI BIPOLI DI RESISTORI LINEARI

Un doppio bipolo a-dinamico in generale è descritto da due relazioni algebriche che legano le intensità di corrente e le tensioni alle due porte:

$$f_1 = (v_1, v_2, i_1, i_2) = 0,$$
$$f_2 = (v_1, v_2, i_1, i_2) = 0.$$

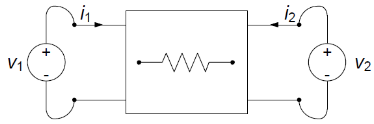
La caratterizzazione espressa da queste due funzioni si dice "implicita" quando nessuna coppia di variabili è espressa esplicitamente in funzione delle altre due. Le forme esplicite che in generale si possono considerare sono molteplici, ed originano diverse rappresentazioni del doppio bipolo:

- ☞ rappresentazione su *base corrente*: le intensità di corrente i_1 e i_2 sono le variabili *indipendenti* e le tensioni v_1 e v_2 sono le variabili *dipendenti*;
- ☞ rappresentazione su *base tensione*: le tensioni v_1 e v_2 sono le variabili *indipendenti* e le intensità di corrente i_1 e i_2 sono le variabili *dipendenti*;
- ☞ rappresentazioni *ibride*: la tensione v_1 e l'intensità di corrente i_2 sono le variabili *indipendenti* e la tensione v_2 e l'intensità di corrente i_1 dono le variabuli *dipendenti* (o viceversa);
- ☞ rappresentazione di *trasmissione*: la tensione v_1 e l'intensità di corrente i_1 sono le variabili *indipendenti* e la tensione v_2 e l'intensità di corrente i_2 dono le variabuli *dipendenti* (o viceversa).

MATRICI DELLE CONDUTTANZE

Consideriamo la rappresentazione controllata in tensione di un doppio bipolo di resistori lineari. Essa equivale a caratterizzare il doppio bipolo attraverso due generatori di tensione applicati alle due porte e determinare le intensità di corrente in funzione delle tensioni. Il circuito corrispondente può essere studiato applicando la sovrapposizione degli effetti, per la quale si ha:

$$\begin{cases} i_1 = i_1' + i_1'' \\ i_2 = i_2' + i_2'' \end{cases}.$$



Le intensità i_1' e i_2' sono quelle che si avrebbero se fosse $v_2 = 0$, mentre i_1'' e i_2'' sono quelle che si avrebbero se fosse $v_1 = 0$.
i_1' e i_2' sono direttamente proporzionali a v_1 ed i_1'' e i_2'' a v_2. Di conseguenza:

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 \\ i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 \end{cases},$$

dove $G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}$sono coefficienti dimensionalmente omogenei con una conduttanza ed indipendenti dalle tensioni definiti come:

$$G_{11} = \frac{i_1}{v_1}|_{v_2=0} = \frac{i_1'}{v_1}, \qquad G_{12} = \frac{i_1}{v_2}|_{v_1=0} = \frac{i_1''}{v_2},$$
$$G_{21} = \frac{i_2}{v_1}|_{v_2=0} = \frac{i_2'}{v_1}, \qquad G_{22} = \frac{i_2}{v_2}|_{v_1=0} = \frac{i_2''}{v_2}.$$

I coefficienti G_{11} e G_{22} sono detti *conduttanze proprie* del doppio bipolo, i coefficienti G_{12} e G_{21} sono detti *conduttanze mutue*.
Definendo i vettori $\mathbf{i} = (i_1, i_2)^T$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$, allora possiamo scrivere il sistema di cui sopra come:

$$\mathbf{i} = G\mathbf{v},$$

dove

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}.$$

La matrice G prende il nome di *matrice delle conduttanze* del doppio bipolo.

L'espressione della potenza assorbita dal doppio bipolo diventa, usando la notazione vettoriale:

$$p = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{i},$$

pertanto

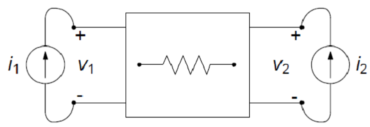
$$p = G\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{i}.$$

Gli elementi della matrice G godnono di alcune importanti proprietà, le principali delle quali sono elencate sotto:

- ☞ $G_{12} = G_{21}$;
- ☞ $G_{11} \geq 0, G_{22} \geq 0$;
- ☞ $|G_{21}| \leq G_{11}, |G_{12}| \leq G_{22}$.

MATRICE DELLE RESISTENZE

In maniera esattamente analoga a quanto visto per la rappresentazione controllata in tensione, è possibile definirne una controllata in corrente, utilizzando due generatori di corrente per caratterizzare il bipolo di resistori lineari in esame.



Applicando la sovrapposizione degli effetti si ha:

$$\begin{cases} v_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 \\ v_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 \end{cases}$$

ovvero, in forma matriciale:

$$\mathbf{v} = R\mathbf{i}, \qquad R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix},$$

dove $R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$ sono coefficienti dimensionalmente omogenei con una resistenza ed indipendenti dalle correnti definiti come:

$$R_{11} = \frac{v_1}{i_1}\Big|_{i_2=0}, \qquad R_{12} = \frac{v_1}{i_2}\Big|_{i_1=0},$$
$$R_{21} = \frac{v_2}{i_1}\Big|_{i_2=0}, \qquad R_{22} = \frac{v_2}{i_2}\Big|_{i_1=0}.$$

I coefficienti R_{11} e R_{22} sono detti *resistenze proprie* del doppio bipolo; i coefficienti R_{12} e R_{21} sono detti *resistenze mutue*.

La matrice R prende il nome di *matrice delle resistenze* del doppio bipolo.

Gli elementi della matrice R godono delle stesse proprietà della matrice G se tutti i resistori sono passivi:

- ☞ $R_{12} = R_{21}$;
- ☞ $R_{11} \geq 0, R_{22} \geq 0$;
- ☞ $|R_{21}| \leq R_{11}, |R_{12}| \leq R_{22}$.

La terza proprietà è una conseguenza della non amplificazione delle tensioni.

La potenza assorbita dal bipolo può essere espressa nel seguente modo:

$$p = \mathbf{i}^T R\mathbf{i}.$$

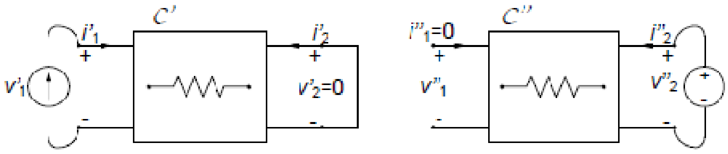
MATRICE IBRIDA

Nella rappresentazione ibrida di un doppio bipolo lineare la tensione v_1 e l'intensità di corrente i_2 vengono espresse in funzione della tensione v_2 e dell'intensità di corrente i_1 (o viceversa) attraverso le relazioni lineari omogenee

$$v_1 = H_{11}i_1 + H_{12}v_2,$$
$$i_2 = H_{21}i_1 + H_{22}v_2.$$

Il coefficiente H_{11} è una costante dimensionalmente omogenea con una resistenza, il coefficiente H_{22} è una costante dimensionalmente omogenea con una conduttanza ed i due coefficienti H_{12} e H_{21} sono costanti adimensionali.

Un doppio bipolo caratterizzato in questo modo può essere visto come un doppio bipolo alimentato da un generatore di corrente ideale alla porta "1" e da un generatore di tensione alla porta "2".



Per caratterizzare i parametri H possiamo fare riferimento ai due circuiti riportati in figura. Nel circuito C' la porta "2" è connessa ad un corto circuito, $v_2 = 0$, mentre nel circuito C'' la porta "1" è collegata ad un circuito aperto, $i_1 = 0$.

Il coefficiente H_{11} è la resistenza equivalente alla porta "1" quando la porta "2" è in corto circuito:

$$H_{11} = \frac{v_1}{i_1}|_{v_2=0} = \frac{v_1'}{i_1};$$

il coefficiente H_{22} è la conduttanza equivalente alla porta "2" con la porta "1" aperta:

$$H_{22} = \frac{i_2}{v_2}|_{i_1=0} = \frac{i_2''}{v_2};$$

il coefficiente H_{12} è il *guadagno in tensione* con la porta "1" aperta:

$$H_{12} = \frac{v_1}{v_2}|_{i_1=0} = \frac{v_1''}{v_2};$$

il coefficiente H_{21} è il *guadagno in corrente* con la porta "2" in corto circuito:

$$H_{21} = \frac{i_2}{i_1}|_{v_2=0} = \frac{i_2'}{i_1}.$$

Introdotti i due vettori colonna $\mathbf{x} = (i_1, v_2)^T$ e $\mathbf{y} = (v_1, i_2)^T$, esse si riscrivono in forma sintetica come

$$\mathbf{y} = H\mathbf{x}, \qquad \text{dove } H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}.$$

Alla matrice H si da il nome di *matrice ibrida* del doppio bipolo. Con questa rappresentazione la potenza assorbita dal doppio bipolo è espressa come:

$$p = \mathbf{x}^T H\mathbf{x}.$$

Anche in questo caso è possibile invertire i ruoli delle variabili dipendenti ed indipendenti, ottenendo:

$$i_1 = H_{11}'v_1 + H_{12}'i_2,$$
$$v_2 = H_{21}'v_1 + H_{22}'i_2.$$

Essa rappresenta l'altra possibile rappresentazione ibrida e sinteticamente si esprime come

$$\mathbf{x} = H'\mathbf{y}.$$

Le due forme ibride sono legate dalla relazione $H' = H^{-1}$.

Per i doppi bipoli di resistori passivi, la matrice ibrida gode di proprietà dimili alle matrici G ed R:

- $H_{12} = -H_{21}$;
- $H_{11} > 0, H_{22} > 0$;
- $|H_{21}| \leq 1, |H_{12}| \leq 1$.

MATRICE DI TRASMISSIONE

Nella *rappresentazione di trasmissione* di un doppio bipolo di resistori lineari la tensione v_1 e l'intensità di corrente i_1 vengono espresse in funzione della tensione v_2 e dell'intensità di corrente $-i_2$ (o vviceversa) attraverso le relazioni lineari omogenee

$$v_1 = T_{11}v_2 + T_{12}(-i_2),$$
$$i_1 = T_{21}v_2 + T_{22}(-i_2),$$

dove i coefficienti $T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}$ sono definiti come:

$$T_{11} = \frac{v_1}{v_2}|_{i_2=0}, \qquad T_{12} = \frac{v_1}{-i_2}|_{v_2=0},$$
$$T_{21} = \frac{i_1}{v_2}|_{i_2=0}, \qquad T_{22} = \frac{i_1}{-i_2}|_{v_2=0}.$$

I coefficienti T_{11} e T_{22} sono due costanti adimensionali. Il coefficiente T_{12} è una costante dimensionalmente omogenea con una resistenza, mentre T_{21} è una costante dimensionalmente omogenea con una conduttanza.

Questa rappresentazione, anche detta *rappresentazione ABCD*, è molto utile nell'analisi di doppi bipoli collegati in "cascata".

Le caratteristiche possono essere rappresentate in forma matriciale ponendo $\mathbf{y} = (v_1, i_1)^T$, $\mathbf{x} = (v_2, -i_2)^T$, con il che si ottiene:

$$\mathbf{y} = T\mathbf{x} \rightarrow T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Alla matrice T si da il nome di *matrice di trasmissione* del doppio bipolo.
Per i doppi bipoli di resistori passivi si hanno le seguenti proprietà:

- ☞ $|T_{11}| \geq 1, |T_{22}| \geq 1$.

Essendo T_{12} e T_{21} dimensionalmente non omogenei, non può essere né $T_{12} = T_{21}$, né $T_{12} = -T_{21}$. Se il doppio bipolo è reciproco, si ha:

- ☞ $\det(T) = 1$.

SINTESI DI UN DOPPIO BIPOLO RESISTIVO LINEARE

È interessante, data una matrice di rappresentazione di un doppio bipolo, individuare il doppio bipolo adinamico lineare più semplice che abbia la matrice di rappresentazione assegnata. È evidente che in questo modo possiamo estendere il concetto di equivalenza a strutture più complesse del semplice bipolo.
La soluzione di questo problema dipende dalle proprietà della matrice che si vuole sintetizzare.
Se la matrice delle resistenze verifica le sue proprietà (o la matrice delle conduttanze verifica le proprie), precedentemente viste, bastano tre resistori passivi per costruire il corrispondente doppio bipolo di resistori.

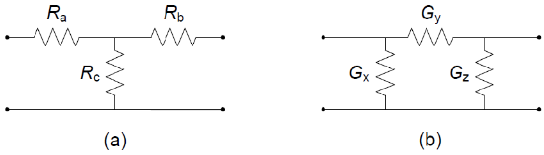
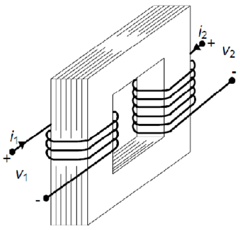


Figura 6.39. (a) Configurazione a T, (b) configurazione a Π

TRASFORMATORE

I trasformatori sono diffusamente impiegati nei sistemi di potenza, nei circuiti di comunucazione e nelle apparecchiature di misura.
Il trasformatore più semplice può essere realizzato con due circuito mutuamente accoppiati come schematizzato in figura.



I due circuiti, primario e secondario, sono realizzati avvolgendo del filo conduttore su un supporto materiale fatto di ferrite o lamine sottili di acciaio speciale di elevata permeabilità magnetica[6].

RELAZIONI CARATTERISTICHE

Applicando la legge di Faraday-Neumann a due linee chiuse, in parte coincidenti con i due avvolgimenti, in analogia a quanto visto per l'induttore, si ottengono per le tensioni v_1 e v_2 del doppio bipolo le relazioni:

$$v_1 = \frac{d\phi_1}{dt}, \qquad v_2 = \frac{d\phi_2}{dt},$$

dove ϕ_1 e ϕ_2 sono, rispettivamente, i flussi del campo magnetico concatenati con l'avvolgimento "1" e l'avvolgimento "2" prodotti da entrambe le intensità di corrente i_1 e i_2.
Al fine di ottenere i due valori della tensione, scritti nelle relazioni come sopra, dalla legge di Faraday, abbiamo ancora una volta supposto che la conducibilità del conduttore con cui sono realizzati i due avvolgimenti sia infinita.

[6] la **permeabilità magnetica** di un materiale è una grandezza fisica che esprime l'attitudine del materiale a magnetizzarsi in presenza di un campo magnetico. La permeabilità magnetica si misura in henry al metro (H/m), equivalente a newton all'ampere quadrato (N/A^2).

Per ricavare dalle formule della tensione le relazioni tra intensità di corrente e le tensioni dei due avvolgimenti dobbiamo fare alcune ipotesi. Assumiamo che il supporto materiale sia costituito da materiale magnetico ideale, in cui siano trascurabili gli effetti dovuti a fenomeni non lineari, come la saturazione e l'isteresi magnetica, e con permeabilità magnetica μ molto grande rispetto a quella del vuoto μ_0. Inoltre assumiamo di poter trascurare le correnti elettriche che nascono per induzione nell'anellop di materiale magnetico. Infine assumiamo che le grandezze siano lentamente variabili in modo che sia possibile trascurare gli effetti delle correnti di spostamento nella legge di Ampère-Maxwell. In queste ipotesi:

- Il campo magnetico risulta prodotto dalle sole correnti dei due avvolgimenti;
- La relazione tra i flussi e le intensità di corrente è di tipo algebrico lineare e vale la sovrapposizione degli effetti.

Allora per i flussi ϕ_1 e ϕ_2 si ha:

$$\phi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_1,$$
$$\phi_2 = M_{21} i_1 + L_2 i_1,$$

dove L_1, L_2, M_{12}, M_{21}, sono quattro parametri indipendenti dalle due intensità di corrente i_1 e i_2 e costanti nel tempo.
$\phi_{11} = L_1 i_1$ è il flusso concatenato con l'avvolgimento primario quando i_2 nel secondario uguale a zero.
$\phi_{22} = L_2 i_2$ è il flusso concatenato con l'avvolgimento secondario quando i_1 nel primario è uguale a zero.
L_1 e L_2 sono i coefficienti di mutua induzione dell'avvolgimento "1" e dell'avvolgimento "2" considerati non interagenti, cioè magneticamente isolati l'uno dall'altro. I coefficienti M_{12} e M_{21} sono detti coefficienti di mutua induzione: M_{12} rappresenta il rapporto tra il flisso del campo magnetico concatenato con l'avvolgimento "1" e la intensità di corrente i_2 quando $i_1 = 0$, mentre M_{21} rappresenta il rapporto tra il flusso del campo magnetico concatenato con l'avvolgimento "2" e la intensità di corrente i_1 quando $i_2 = 0$.
I coefficienti di autoinduzione sono intrinsecamente positivi; quelli di mutua induzione possono essere positivi o negativi a causa delle diverse possibili combinazioni delle orientazioni scelte per i versi di riferimento delle intensità di corrente nei due avvolgimenti.
Per i flussi del campo magnetico e le intensità di corrente esiste una proprietà di reciprocità: si considerino i due circuiti accoppiati con $i_1 \neq 0$ e $i_2 = 0$. Si ha che l'intensitò di corrente i_1 può essere considerata come "causa" ed il flusso $\phi_{21} = M_{21} i_1$, concatenato con l'avvolgimento "2", come "effetto". Dualmente si considerino i due induttori accoppiati con $i_2 \neq 0$ e $i_1 = 0$. In questo caso l'intensità di corrente i_2 può essere considerata come "causa" ed il flusso $\phi_{12} = M_{12} i_2$, concatenato con l'avvolgimento "1", come "effetto". Utilizzando le equazioni del modello quasi stazionario magnetico, il rapporto tra la causa e l'effetto nei due circuiti con $i_2 = 0$ è uguale a quello nei due circuiti accoppiati con $i_1 = 0$, dunque

$$M_{12} = M_{21} = M.$$

Il coefficiente di mutua induzione è indicato con M e si misura in *henry* (H).
In virtù di quanto asserito, otteniamo:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt},$$
$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Il trasformatore è dunque un doppio bipolo dinamico lineare. A queste due equazioni differenziali appena scritte bisogna affiancare le condizioni iniziali, che in questo caso corrispondono ai valori delle intensità di corrente i_1 e i_2 ad un istante assegnato: è evidente che $i_1(t)$ e $i_2(t)$ dipendono dalla storia sia delle tensioni $v_1(t)$ e $v_2(t)$ nell'intervallo $(0, t)$ che dai loro valori iniziali. Questa è la ragione per cui si dice che il trasformatore è un *bipolo a memoria*: il suo comportamento, al generico istante t, dipende da ciò che è accaduto negli istanti precedenti.

POTENZA ED ENERGIA

Come per qualsiasi doppio bipolo, la potenza assorbita dal trasformatore è data dalla somma di quella assorbita da ciascuna porta. Sostituendo le relazioni caratteristiche della tensione del trasformatore nell'espressione della potenza, si ottiene:

$$p(t) = \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}\right) i_1 + \left(M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}\right) i_2 = \frac{dw_m}{dt},$$

dove:

$$w_m(i_1, i_2) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2.$$

Considerato il differenziale:

$$p(t)dt = L_1 i_1 di_1 + M i_1 di_2 + +M i_2 di_1 + L_2 i_2 di_2,$$

è immediato osservare che esso risulta "esatto" in virtù del fatto che $M_{12} = M_{21} = M$. Dunque l'energia assorbita dal trasformatore nel passaggio tra una condizione i_1', i_2' ed un altra condizione i_1'', i_2'' non dipende dal percorso seguito. Di conseguenza possiamo defininire "conservativo" anche questo componente e l'espressione di $w_m(i_1, i_2)$ rappresenta l'energia immagazzinata dal ttrasformatore.
Il trasformatore non dissipa l'energia elettrica che assorbe ma la immagazzina sotto forma di energia magnetica, potendola successivamente restituire al circuito in modo completo. Per tali considerazioni il trasformatore appartiene alla categoria degli elementi passivi e conservativi.
L'energia immagazzinata è per definizione una quantità positiva.
Esiste una condizione sui coefficienti:

$$M^2 \leq L_1 L_2.$$

Essa lega tra loro i tre parametri che definiscono il mutuo accoppiamento ed è detta *condizione di fisica realizzabilità* per il trasformatore.
Il coefficiente di mutua induzione è spesso espresso in funzione del *coefficiente di accoppiamento k*, definito come:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}},$$

che dovrà verificare $k \leq 1$.
Quando $k = 0$, si ha $M = 0$, cioè non esiste relazione tra i due avvolgimenti.
Quando $k = 1$ si diche che i due circuiti sono *accoppiati perfettamente*. In tal caso esiste una coppia di valori $i_1 \neq 0$ e $i_2 \neq 0$ che annulla l'energia $w_m(i_1, i_2)$.

CONDIZIONE DI ACCOPPIAMENTO PERFETTO

Al fine di interpretare in modo più fisico il significato della condizione di accoppiamento perfetto e del coefficiente di accoppiamento k, andiamo a definire i cosiddetti "flussi medi" di auto e mutua induzione come:

$$\phi_{11m} = \frac{L_1 i_1}{N_1}, \qquad \phi_{12m} = \frac{M_{12} i_2}{N_1}, \qquad \phi_{21m} = \frac{M_{21} i_1}{N_2}, \qquad \phi_{22m} = \frac{L_2 i_2}{N_2},$$

dove N_1 ed N_2 sono ripettivamente il numero di spire degli avvolgimenti "1" e "2".

$$\phi_{1d} = \phi_{11m} - \phi_{21m}, \qquad \phi_{2d} = \phi_{22m} - \phi_{12m},$$

definiscono i *flussi medi dispersi* al primario e secondario.
La condizione ideale in cui i flussi dispersi siano nulli dà luogo alla condizione di *accoppiamento perfetto*, per la quale deve valere:

$$L_1 L_2 = M^2.$$

In questa situazione una intensità di corrente nel primo avvolgimento produce lo stesso flusso concatenato per spira sia nel primo che nel secondo avvolgimento e viceversa.
Al fine di realizzare un accoppiamento perfetto è necessario che il flusso del campo magnetico sia in qualche modo completamente incanalato lungo la struttura sulla quale vengono poi realizzati i due avvolgimenti primario e secondario. Solo in tal modo, i flussi dispersi saranno nulli, dunque il supporto materiale deve essere un tubo di flusso per il campo di induzione magnetica.
Quando l'accoppiamento è perfetto, l'energia magnetica immagazzinata è data da:

$$W_m(i_1, i_2) = \frac{1}{2}L_1\left(i_1 + \frac{M}{L_1}i_2\right)^2 = \frac{1}{2}L_2\left(i_2 + \frac{M}{L_2}i_1\right)^2 \geq 0.$$

Pertanto l'energia immagazzinata è uguale a zero se:

$$i_1 = -\left(\frac{M}{L_1}\right)i_2,$$

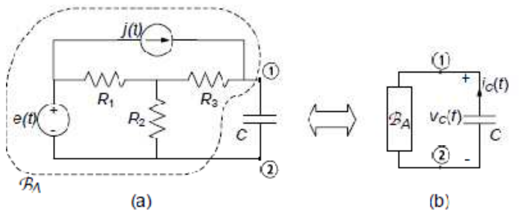
pur essendo $i_1 \neq 0$ ed $i_2 \neq 0$. Affinchè ciò accadam il campo magnetico netto prodotto dalle due intensità di corrente deve essere uguale a zero in ogni punto dello spazio, cioè il campo prodotto dalla intensità di corrente i_1 deve cancellare esattamente il campo dovuto alla intensità di corrente i_2, in ogni punto.
Questa è una condizione ideale, possibile solo se non vi è dispersione di flusso.

DINAMICA DEI CIRCUITI LINEARI E TEMPO-INVARIANTI

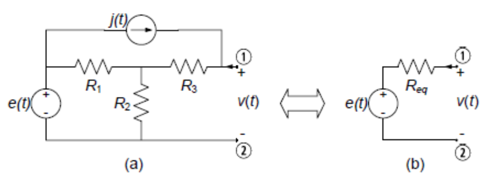
Un circuito si dice dinamico quando contiene elementi quali condensatori, induttori, trasformatori. In tal caso, proprio per la presenza degli elementi dinamici, parte delle equazioni che regolano il suo funzionamento sono di tipo differenziale e ciò ha importanti conseguenze sul suo comportamento.
Si definisce *ordine* di un circuito dinamico l'ordine delle equazioni differenziali che govenano le dinamiche delle tensioni e intensità di corrente. Un circuito che contenga un solo condensatore o un soo induttore è del primo ordine, quando invece sono presenti due bipoli dinamici è del secondo ordine e in generale, è di ordine N se contiene N bipoli dinamici. Osserviamo che il trasformatore ad accoppiamento non perfetto è un elemento circuitale del secondo ordine. Infatti il suo circuito equivalente contiene due induttori. Invece il trasformatore ad accoppiamento perfetto è un elemento dinamico del primo ordine.
Per studiare la dinamica di un circuito, alle equazioni circuitali bisogna aggiungere i valori all'istante iniziale della tensione di ciascun condensatore e dell'intensità di corrente di ciascun induttore.
La tensione del condensatore descrive lo *stato* del condensatore e l'intensità di corrente dell'induttore descrive lo *stato* dell'induttore. Conoscere lo stato di un elemento dinamico ad un dato istante significa equivalentemente conoscere l'energia in esso immagazzinata in quell'istante. Per questa ragione, le tensioni dei condensatori e le intensità di corrente degli induttori prendono il nome di *grandezze di stato*.
I resistori non immagazzinano l'energia che assorbono e, quindi, per essi non è possibile individuare alcuna grandezza di stato.
Fra i diversi modi in cui possiamo equivalentemente scrivere le equazioni di un circuito dinamico, riveste particolare importanza quello in cui compaiono come incognite le sole grandezze di stato: si parla, in tal caso, di *equazioni di stato* del circuito.
Le equazioni circuitali, assieme alle condizioni iniziali, descrivono completamente la dinamica di un circuito. Ad eccezione delle equazioni caratteristiche degli elementi dinamici, le equazioni del circuito sono di tipo algebrico.
Una tecnica per la soluzione di un circuito lineare consiste nel ridurre, attraverso l'eliminazione per sostituzione, il sistema completo di equazioni del circuito ad una sola equazione in una sola incognita. Una volta risolta questa equazione nell'incognita scelta, si possono determinare eventuali altre grandezze di interesse che sono state eliminate nella procedura di riduzione. Questa tecnica può essere applicata senza alcuna difficoltà di principio anche a circuiti complessi con svariati elementi dinamici.

CIRCUITI *RC* ED *RL* DEL PRIMO ORDINE

Vogliamo generalizzare quanto visto fin ora alla classe di tutti i circuiti del primo ordine, lineari e tempo invarianti, indipendentemente da quanto sia complessa la parte a-dinamica.
Un metodo molto importante ed efficace per l'analisi dei circuiti del primo ordine si basa sull'utilizzo degli equivalenti di Thévenin o Norton delle rispettive parti a-dinamiche; ciò permette di riportare un circuito comunque complesso nella parte a-dinamica ad una tipologia ben precisa di circuito equivalente. Per illustrare questa tecnica, facciamo riferimento al circuito in figura (a).



Esso è un circuito *RC* del primo ordine, costituito da un certo numero di elementi a-dinamici. In figura (b) la parte a-dinamica del circuito B_A è sostituita da un certo bipolo a-dinamico equivalente.
Il bipolo B_A può essere rappresentato attraverso il bipolo equivalente di Thévenin come segue:



e_0 è la sua tensione a vuoto ed R_{Th} la resistenza equivalente di Thévenin, cioè la resistenza equivalente di B_A quando tutti i generatori ideali al suo interno sono spenti.

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3,$$

$$e_0 = e(t)\frac{R_2}{R_1 + R_2} + j(t)\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3\right).$$

L'andamento nel tempo della tensione a vuoto e_0 dipende dunque dall'andamento temporale della tensione $e(t)$ e dalla intensità di corrente $j(t)$.
La tensione del condensatore è, in ogni istante, determinata dall'interazione tra il condensatore stesso ed il resto del circuito, che consiste in un bipolo di soli elementi a-dinamici, B_A.
L'equazione che governa $v(t)$ è il frutto dell'interazione tra due diverse esigenze: che il condensatore si comporti in modo compatibile con la sua specifica natura e che tale comportamento sia a sua volta compatibile con quello di tutti gli altri elementi che definiscono il bipolo a-dinamico B_A.
Il circuito ridotto, fatte le convenzioni, è descritto dalle due equazioni:

$$i_C = \frac{v_C - e_0(t)}{R_{Th}},$$

$$C\frac{dv_C}{dt} = -i_C,$$

dove v_C è la grandezza di stato. La prima è un'equazione algebrica, mentre la seconda è differenziale. L'equazione che coverna lo stato si ottiene sostituendo i_C nell'equazione differenziale:

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R_{Th}C} = \frac{e_0(t)}{R_{Th}C}.$$

Questa è un'equazione differenziale a derivate ordinarie, del primo ordine, lineare ed a coefficienti costanti.
Si otterrebbe un risultato analogo se invece del bipolo equivalente di Thévenin si utilizzasse il bipolo equivalente di Norton per rappresentare la parte a-dinamica del circuito.
Tale equazione andrebbe così risolta con la condizione iniziale:

$$v(t_0) = V_0,$$

dove t_0 è l'istante iniziale. Questa risoluzione sì ottenuta prende il nome di *problema di Cauchy*.
"Esiste ***una ed una sola*** *soluzione dell'equazione* $\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R_{Th}C} = \frac{e_0(t)}{R_{Th}C}$ *che verifica la condizione iniziale* $v(t_0) = V_0$*."*
questa proprietà è dovuta alla linearità dell'equazione.
La soluzione generale du quest'equazione può essere espressa come somma della soluzione generale dell'equazione omogenea ad essa associata e di una soluzione particolare $v_p(t)$ della stessa che dipende dai generatori indipendenti presenti nel circuito. L'espressione dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $Ke^{\lambda t}$, dove K è una costante arbitraria e λ è la soluzione dell'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale in esame:

$$\lambda + \frac{1}{R_{Th}C} = 0.$$

La soluzione $\lambda = -\frac{1}{R_{Th}C}$ è la *frequenza naturale* del circuito e $\tau = -\frac{1}{\lambda} = R_{Th}C$ è la *costante di tempo.*
La soluzione dell'equazione differenziale, con la condizione iniziale assegnata è:

$$v_C(t) = [V_0 - v_p(t_0)]e^{-\frac{t-t_0}{R_{Th}C}} + v_p(t) \quad \text{per } t \geq t_0.$$

Se $R_{Th}C > 0$ il primo termine decade esponenzialmente a zero sia per $t \to +\infty$, sia per $t_0 \to -\infty$ con t finito indipendentemente dal valore della condizione iniziale. Per questa ragione prende il nome di *termine transitorio.* il comportamento del circuito dopo che il transitorio si è esaurito non dipende dal valore della condizione iniziale. A tale comportamento si da il nome di *funzionamento a regime* del circuito.
Una volta determinata la tensione v_C è possibile determinare qualsiasi altra grandezza del circuito in esame. L'intensità di corrente del condensatore si ottiene sostituendo l'espressione di $v_C(t)$ in i_C (o equivalentemente nell'equazione differenziale che la segue). Inoltre essendo nota la tensione del bipolo a-dinamico B_A le intensità di corrente e le tensioni di tutti gli elementi a-dinamici del circuito in esame possono essere determinate risolvendo il circuito a-dinamico lineare della figura (a) precedentemente mostrata.

Vale la pena osservare che l'equazione caratteristica $\lambda + \frac{1}{R_{Th}C} = 0$ (e dunque λ e τ) non dipende dalla scelata fatta per la grandezza in esame. Difatti, se dal sistema costituito da $\begin{cases} i_C = \frac{v_C - e_0(t)}{R_{Th}} \\ C\frac{dv_C}{dt} = -i_C \end{cases}$, ricaviamo l'equazione per la grandezza $i_C(t)$ ed è immediato verificare che si ottiene

$$\frac{di_C}{dt} + \frac{i_C}{R_{Th}C} = \frac{1}{R_{Th}}\frac{d}{dt}\,e_0(t).$$

Questa equazione e l'equazione differenziale precedentemente analizzata, differiscono solo per il escondo membro. In altri termini, se di tali due equazioni consideriamo le equazioni omogenee associate esse risultano identiche, a meno dell'incognita. Questa proprietà è generale: l'equazione differenziale omogenea associata ad un circuito lineare è sempre la stessa, indipendentemente da quale sia la grandezza del circuito nella quale è stata ricavata.

Quanto visto sin qui, a titolo esemplificativo per un circuito di tipo *RC* del primo ordine, si può generalizzare a qualsiasi circuito del primo ordine, anche *RL*. Consideriamo un generico circuito *RL* del primo ordine costituito da elementi lineari ed un induttore. Anche in questo caso l'interazione dell'unico elemento dinamico del circuito con la parte a-dinamica può essere rappresentata attraverso il generatore equivalente di Thévenin (o di Norton).

La relazione differenziale

$$L\frac{di_L}{dt} = -v_L,$$

descrive il funzionamento dell'induttore, mentre quella algebrica

$$v_L = R_{Th}i_L + e_0,$$

descrive il funzionamento del bipolo a-dinamico. L'equazione differenziale che ne deriva è

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_{Th}}{L}i_L = \frac{e_0}{L},$$

con la condizione iniziale

$$i_L(t_0) = I_0.$$

In questo caso l'equazione caratteristica associata è:

$$\lambda + \frac{R_{Th}}{L} = 0,$$

dunque la *frequenza naturale* del circuito è $\lambda = -\frac{R_{Th}}{L}$ e la *costante di tempo* ha espressione $\tau = \frac{L}{R_{Th}}$.

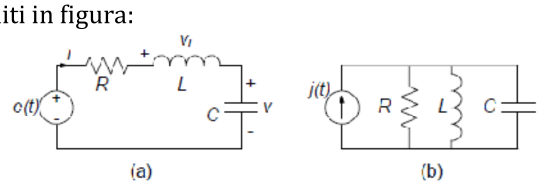
Possiamo concludere che qualsiasi circuito del primo ordine lineare e tempo invariante può in generale essere studiato con la seguente procedura:

- si determina la resistenza equivalente di Thévenin, R_{Th} , del bipolo a-dinamico visto dai morsetti del bipolo dinamico e di conseguenza la costante di tempo del circuito, τ;
- si determina una sola soluzione particolare del circuito semplificato con l'equazione equivalente di Thévenin o Norton;
- si scrive la soluzione generale come somma del termine $Ae^{-\frac{1}{\tau}}$ e della soluzione particolare;
- si impone la condizione iniziale e si determina il valore della costante di integrazione A.

CIRCUITI *RLC* SERIE E PARALLELO

Un circuito con due elementi dinamici è un circuito del secondo ordine. Anche per questi circuiti esistono metodi di analisi generali come quelli appena studiati per quelli del primo ordine.

Consideriamo dunque i due circuiti in figura:



Entrambi sono costituiti da un induttore, un condensatore ed un resistore lineari e tempo invarianti; ciascuno è poi forzato da un generatore, in un caso di tensione, nell'altro di corrente. Essi sono fra i circuiti del secondo ordine più semplici che si possa considerare e al contempo completi dal punto di vista del comportamento dinamico. Il circuito (a) prende il nome di circuito *RLC* serie e il circuito (b) prende il nome di *RLC* parallelo.

CIRCUITO *RLC* SERIE

Consideriamo il circuito RLC serie. Supponiamo di volerlo analizzare valutando la tensione del condensatore $v(t)$ per $t \geq 0$ a partire dalle condizioni iniziali

$$v(0) = V_0,$$
$$i(0) = I_0.$$

Le equazioni del circuito sono:

$$v_L = e - v - Ri,$$
$$i = C\frac{dv}{dt},$$
$$v_L = L\frac{di}{dt}.$$

Sostituendo l'espressione di v_L dalla prima nella terza, otteniamo le equazioni di stato del circuito:

$$\begin{cases} C\dfrac{dv}{dt} = i \\ L\dfrac{di}{dt} = -Ri - vèe(t) \end{cases},$$

che vanno risolte con le condizioni iniziali precedentemente assegnate.

Per risolvere questo problema, riduciamo il sistema ad una sola equazione in una sola incognita. Sostituendo la prima equazione nella seconda, si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = \frac{e(t)}{LC}.$$

Questa è un'equazione differenziale a derivate ordinarie del secondo ordine, lineare ed a coefficienti costanti. Essa va risolta assegnando il valore iniziale della tensione del condensatore ed il valore della sua derivata prima all'istante iniziale $t = 0$. il valore dv/dt in ciascun istante può essere determinato utilizzando le equazioni di stato. Utilizzando la prima equazione del sistema e le condizioni iniziali per le grandezze di stato otteniamo:

$$\begin{cases} v(t = 0) = V_0 \\ \left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \dfrac{I_0}{C} \end{cases}.$$

Il sistema costituisce un problema di Cauchy del secondo ordine. Ad esso si perviene ogni qual volta si analizza un generico circuito lineare e tempo invariante con due elementi dinamici. Determinata la tensione del condensatore, usando la prima equazione del sistema è possibile determinare l'altra grandezza di stato del circuito, cioè l'intensità di corrente dell'induttore. Note le grandezze di stato è possibile determinare tutte le altre grandezze del circuito in esame utilizzando le equazioni del circuito.

Ovviamente è possibile determinare direttamente l'equazione per l'intensità di corrente dell'induttore. Dalle equazioni di stato si ha:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{1}{L}\frac{de}{dt}.$$

Essa deve essere risolta con le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} i(t = 0) = I_0 \\ \left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} = \dfrac{1}{L}[-RI_0 - V_0 + e(t = 0)] \end{cases}.$$

Le due equazioni differenziali, in funzione della tensione e dell'intensità di corrente differiscono solo per il termine noto: i termini a sinistra di queste equazioni hanno tutti la stessa formula e sono moltiplicati tutti per gli stessi coefficienti.

Per risolvere la prima equazione differenziale, in funzione di v con le sue condizioni iniziali, dobbiamo anzitutto tovare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata e poi determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Siccome l'equazione omogenea associata governa anche l'evoluzione libera del circuito considereremo dapprima il caso in evoluzione libera e poi estenderemo i risultati alla situazione in presenza di forzamento.

EVOLUZIONE LIBERA E MODI NATURAL

L'equazione che governa la tensione del condensatore del circuito RLC serie in evoluzione libera è:

$$\frac{d^2 v_l}{dt^2} + 2\sigma \frac{dv_l}{dt} + \omega_r^2 v_l = 0,$$

dove:

$$\sigma = \frac{R}{2L}$$

e:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Entrambi questi parametri hanno le dimensioni dell'inverso di un tempo (s^{-1}).
È bene osservare la circostanza che il parametro ω_r non è altro che la pulsazione di risonanza del circuito *RLC*.
L'equazione differenziale sopra scritta è un'equazione ordinaria del secondo ordine, lineare a coefficienti costanti ed omogenea. La sua soluzione generale può essere determinata partendo da funzioni del tipo $Ke^{\lambda t}$, che hanno la proprietà fondamentale di mantenere simili le derivate a meno del fattore costante. Con passaggi analoghi a quanto visto per il caso del primo ordine, si trova facilmente che $Ke^{\lambda t}$ è soluzione dell'equazione differenziale se la frequanza naturale λ è soluzione dell'equazione algebrica di secondo grado:

$$\lambda^2 + 2\sigma\lambda + \omega_r^2 = 0.$$

Questa è l'*equazione caratteristica* associata all'equazione differenziale. Il polinomio a primo membro dell'equazione prende il nome di polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale. Esso è la somma di tre termini (monomi) in λ: al termine dell'equazione differenziale in cui compare la derivata seconda corrisponde nel polinomio il termine di grado due, con lo stesso coefficiente della derivata seconda (cioè 1); al termine in cui compare la derivata prima corrisponde il termine di grado uno, sempre con lo stesso coefficiente della derivata prima (cioè 2σ); infine, al termine non derivato corrisponde il termine di grado zero, con lo stesso coefficiente che moltiplica la funzione di incognita (cioè ω_r^2).
Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono:

$$\begin{cases} \lambda_+ \\ \lambda_- \end{cases} = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_r^2}.$$

Se $\lambda_+ \neq \lambda_-$ esistono allora due soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale, del tipo:

$$v^+(t) = K_+ e^{\lambda_+ t},$$
$$v^-(t) = K_- e^{\lambda_- t}.$$

Siccome l'equazione differenziale in esame è anche lineare, allora anche la loro somma

$$v_l(t) = K_+ e^{\lambda_+ t} + K_- e^{\lambda_- t},$$

è una sua soluzione.
Quando le due frequnze naturali sono coincidenti, $\lambda_+ = \lambda_- = -\sigma$, l'espressione della soluzione generale dell'equazione omogenea associata è:

$$v_l(t) = K_0 e^{-\sigma t} + K_1 t e^{-\sigma t}.$$

Le due costanti di integrazione K_+ e K_- (o K_0 eK_1) devono essere determinate imponendo che $v_l(t)$ verifichi le condizioni iniziali, quindi K_+ e K_- (o K_0 eK_1) dipendono dallo stato iniziale del circuito e dalle grandezze impresse dei generatori indipendenti. Le frequenze naturali λ_+e λ_- sono, invece, grandezze caratteristiche del circuito, che non dipendono dai generatori indipendenti e dallo stato iniziale.
Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema di equazioni algebriche lineari (se $\lambda_+ \neq \lambda_-$):

$$K_+ + K_- = V_0,$$
$$\lambda_+ K_+ + \lambda_- K_- = \frac{I_0}{C},$$

nelle incognite K_+e K_-. Le soluzioni sono:

$$K_+ = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}\left(\frac{I_0}{C} - \lambda_- V_0\right),$$
$$K_- = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}\left(\lambda_+ V_0 - \frac{I_0}{C}\right).$$

DINAMICA IN PRESENZA DI FORZAMENTO

Si consideri, ora, la situazione in cui la tensione del generatore è diversa da zero. Bisogna in questo caso determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i=\frac{1}{L}\frac{de}{dt}$. Essa può essere espressa attraverso la somma della soluzione generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare.
Tenuto conto di quanto abbiamo visto per l'omogenea si ha:

$$v(t)=\begin{cases} K_+e^{\lambda_+t}+K_-e^{\lambda_-t}+v_p(t) & \text{se } \lambda_+\neq\lambda_- \\ K_0e^{-\sigma t}+K_1te^{-\sigma t}+v_p(t) & \text{se } \lambda_+=\lambda_-=-\sigma' \end{cases}$$

dove $v_p(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione completa che dipende dalla funzione $e(t)$. quando le frequenze naturali sono distinte e complesse coniugate conviene esprimere la soluzione generale nella forma:

$$v(t)=Ke^{-\sigma t}\cos(\omega_d t+\Phi)+v_p(t).$$

Le costanti arbitrarie K_+ e K_- (o K_0 e K_1 oppure Ke Φ) devono essere scelte in maniera tale da verificare le condizioni iniziali.
Se le frequenze sono distinte ($\lambda_+\neq\lambda_-$) e reali, imponendo le condizioni iniziali, si ottiene il sistema di equazioni:

$$K_++K_-=V_0-v_p(t=0),$$
$$\lambda_+K_++\lambda_-K_-=\frac{I_0}{C}-\frac{dv_p}{dt}|_{t=0}.$$

Se $\lambda_+=\lambda_-$ si ottiene il sistema di equazioni:

$$K_0=V_0-v_p(t=0),$$
$$-\sigma K_0+K_1=\frac{I_0}{C}-\frac{dv_p}{dt}|_{t=0}.$$

Infine, quando le frequenze naturali sono distinte e complesse coniugate si esprime la soluzione generale attraverso $v(t)=Ke^{-\sigma t}\cos(\omega_d t+\Phi)+v_p(t)$, imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema di equazioni:

$$K\cos\Phi=V_0-v_p(t=0),$$
$$K\sin\Phi=\frac{1}{\omega_d}\left(\frac{dv_p}{dt}|_{t=0}-\frac{I_0}{C}\right).$$

Se il resistore, il condensatore e l'induttore sono passivi il primo termine nelle espressioni del sistema di $v(t)$ tende asintoticamente a zero con legge esponenziale per $t\to+\infty$, qualunque siano i valori delle condizioni iniziali. Esso è il termine transitorio.

CIRCUITO *RLC* PARALLELO
Introduciamo ora il caso del circuito RLC parallelo. È molto semplice, sulla falsariga di quanto visto per il circuito serie, ricavare in questo caso l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2+\frac{1}{RC}\lambda+\frac{1}{LC}=0.$$

In buona sostanza, una volta posto $\sigma=\frac{1}{2RC}$, $\omega_r^2=\frac{1}{LC}$ e ritorniamo quindi alla trattazione precedente con analoghe considerazioni.
I circuiti RLC serie e parallelo, oltre ad essere i più semplici circuiti del secondo ordine che esibiscono le dinamiche più generali, rappresentano il prototipo di una categoria più ampia di circuiti: difatti in tutti i circuiti del secondo ordine nei quali la parte a-dinamica sia riducibile ad un unico bipolo, il circuito equivalente sarà dempre un circuito RLC serie o parallelo.

CIRCUITI DISSIPATIVI E CONSERVATIVI

Consideriamo dapprima il caso di un circuito del primo ordine. La frequenza naturale è in tal caso una grandezza reale e può in generale essere positiva, nulla o negativa. Quando la frequenza naturale è negativa, la costante di tempo è positiva e lo stato del circuito in evoluzione libera tende a zero con legge esponenziale per $t\to+\infty$. Quando la frequenza naturale è zero, l'evoluzione libera è una costante uguale al valore iniziale della grandezza di stato. L'evoluzione libera diverge esponenzialmente se la frequenza naturale è maggiore di zero.
Da queste considerazioni risulta evidente che il segno della frequenza naturale caratterizza fortemente la dinamica di un circuito del primo ordine.
Sarebbe interessante dunque poterne prevedere il segno senza dover risolvere il circuito. Analizziamo questa questione considerando un circuito RC del primo ordine in evoluzione libera (analogo il caso RL) e sia R_{eq} la resistenza equivalente del bipolo a-dinamico connesso al condensatore. Siccome la capacità del condensatore è posi-

tiva, la frequenza naturale è minore di zero quando $R_{eq} > 0$, ed è maggiore di zero quando $R_{eq} < 0$; la frequenza naturale è nulla quando $R_{eq} = \infty$. Allora quando $R_{eq} > 0$, la tensione del condensatore deresce nel tempo e tense a zero con legge esponenziale, quando $R_{eq} = \infty$ la tensione resta costante, invece quando $R_{eq} < 0$ la tensione del condensatore cresce nel tempo con legge esponenziale.
Applicando la conservazione delle potenze al circuito *RC* in evoluzione libera, si perviene alla seguente equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cv^2\right) = -p_{ad},$$

dove p_{ad} è la potenza istantanea assorbita dalla parte a-dinamica del circuito. Per un generico circuito *RL* in evoluzione libera invece abbiamo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = -p_{ad}.$$

Quando il circuito *RC* (*RL*) è costituito di soli elementi strettamente passivi, la potenza assorbita dalla parte a-dinamica del circuito è *strettamente positiva*. L'energia immagazzinata nel condensatore (nell'induttore) è una funzione decrescente del tempo, fino a quando il circuito non so porta nello stato di riposo: l'energia inizialmente immagazzinata dagli elementi dinamici viene *dissipata* negli elementi a-dinamici durante l'evoluzione libera. In questo caso diciamo che il circuito è *dissipativo.*
Quando gli elementi a-dinamici non sono tutti strettamente passivi la potenza assorbita dalla parte a-dinamica può essere nulla anche se la tensione del condensatore (intensità di corrente dell'induttore) è diversa da zero. Ciò accade, ad esempio, quando il condensatore è collegato in serie con un circuito aperto (oppure l'induttore è collegato in parallelo con un corto circuito). Il circuito aperto ed il corto circuito sono infatti elementi passivi ma non strettamente. In questo caso l'energia negli elementi dinamici si conserva e diciamo perciò che il circuito è *conservativo*.
Quanto visto per i circuiti del primo ordine può essere esteso anche a quelli del secondo ordine e, più in generale, a quelli di ordine *N*. Applicando la conservazione delle potenze di un circuito del secondo ordine in evoluzione libera si ha:

$$\frac{dW_i}{dt} = -p_{ad},$$

dove p_{ad} è sempre la potenza istantanea assorbuta dall'intera parte a-dinamica del circuito e W_i è l'energia totale immagazzinata nei due elementi dinamici del circuito.

Un circuito si dice *dissipativo* se nell'evoluzione libera l'energia immagazzinata negli elementi dinamici tende asintoticamente a zero per $t \to +\infty$: essa viene completamente assorbita dagli elementi a-dinamici passivi e quindi dissipata in calore. È evidente che un circuito del primo orsine è dissipativo se e solo se la frequenza naturale è strettamente minore di zero. Per un circuito del secondo ordine dissipativo le frequenze naturali devono essere o entrambe negative (se reali), o con la parte reale negativa (se complesse coniugate).

DISSIPATIVITÀ E REGIME

<u>Regime stazionario</u>:

> *"in un circuito lineare tempo invariante dissipativo con soli generatori stazionari, il regime di funziona mento che si instaura è anch'esso stazionario."*

<u>Regime sinusoidale</u>:

> *"in un circuito lineare tempo invariante dissipativo con soli generatori sinusoidali ed isofrequenziali, il regime di funzionamento che si instaura è anche esso sinusoidale con la stessa pulsazione dei generatori."*

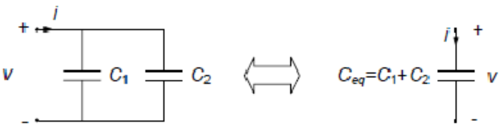
<u>Regimi periodico e aperiodico</u>:

> *"per un circuito lineare tempo invariante dissipativo contenente generatori costanti e generatori sinusoida li con diverse pulsazioni il regime risultante è dato dalla sovrapposizione dei regimi che si avrebbero se i generatori agissero singolarmente. Esso è periodico se tutte le pulsazioni sono commensurabili tra loro, in vece è aperiodico se non tutte le pulsazioni sono commensurabili tra loro."*

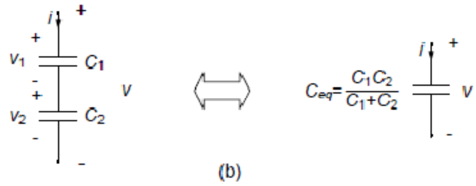
In questo caso la soluzione di regime può essere calcolata applicando la sovrapposizione degli effetti: il regime prodotto da più generatori è uguale alla somma dei regimi che si avrebbero se i generatori agissero singolarmente.

CONNESSIONI IN SERIE E PARALLELO DI BIPOLI DINAMICI FONDAMENTALI

CONDENSATORI

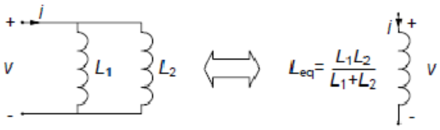


(a)

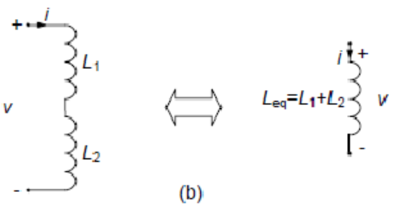


(b)

INDUTTORI



(a)



(b)

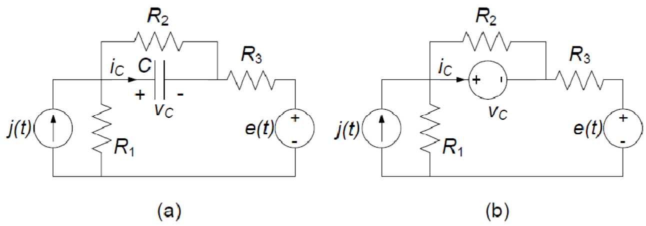
FORMULAZIONE ON LE EQUAZIONI DI STATO

Tra le diverse possibili riduzioni delle equazioni circuitali assume particolare rilievo quella che consiste nel ridurre, prima, il sistema completo di equazioni del circuito al sistema di equazioni in cui le incognite sono solo le grandezze di stato, le cosiddette *equazioni di stato* del circuito, per poi risolverle con le condizioni iniziali assegnate.

CIRCUITO RESISTIVO ASSOCIATO AD EQUAZIONI DI STATO

Le grandezze di stato di un circuito giocano un ruolo fondamentale. Tutte le grandezze di un circuito lineare possono essere espresse in funzione delle tensioni dei condensatori e delle correnti degli induttori attraverso semplici relazioni algebriche lineari.
Esprimere le grandezze del circuito in funzione delle grandezze di stato significa considerare le tensioni dei condensatori e le intensità di corrente degli induttori come variabili indipendenti, cioè come se fossero note. Si consideri allora il circuito ottenuto sostituendo a ciascun condensatore un generatore di corrente con la stessa intensità di corrente dell'induttore. Per costruzione, questo circuito, a cui si da il nome di *circuito resistivo associato*, descrive il legame tra le grandezze di stato e tutte le altre grandezze del circuito dinamico. Siccome il circuito resistivo associato è a-dinamico e lineare la relazione tra una generica grandezza ed i generatori è di tipo algebrico lineare.

Attraverso il circuito resistivo associato è possibile esprimere tutte le grandezze di un circuito dinamico in funzione delle grandezze di stato e delle grandezze impresse dai generatori indipendenti e, in particolare le intensità di corrente dei condensatori e le tensioni degli induttori.



Consideriamo il circuito dinamico del primo ordine in figura (a). In figura (b) è mostrato il circuito ottenuto da quello di partenza sostituendo al posto del condensatore un generatore di tensione che imprime una tensione $v_C(t)$ proprio uguale a quella del condensatore. Esso è il *circuito resistivo associato* al circuito (a). Attraverso tale circuito, è possibile esprimere ogni grandezza del circuito in funzione della tensione del condensatore e delle tensioni e delle correnti impresse dai generatori ideali.
Ad esempio risolvendo in $i_C(t)$, applicando la sovrapposizione degli effetti si ha:

$$i_C(t) = j(t)\frac{R_3}{R_2 + R_3} - \frac{e(t)}{R_1 + R_3} - v_C(t)\frac{R_1 + R_2 + R_3}{(R_1 + R_3)R_2}.$$

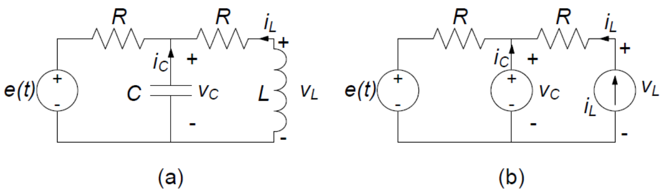
L'espressione di $i_C(t)$ può altresì essere ottenuta sfruttando tutte le altre tecniche sin qui introdotte per l'analisi dei circuiti a-dinamici.
Mettendo a sistema questa equazione con l'equazione caratteristica dell'elemento dinamico:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt},$$

otteniamo immediatamente l'equazione di stato:

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C}\left[j(t)\frac{R_3}{R_2 + R_3} - \frac{e(t)}{R_1 + R_3} - v_C(t)\frac{R_1 + R_2 + R_3}{(R_1 + R_3)R_2}\right].$$

Attraverso il circuito resistivo associato abbiamo dunque messo a punto un metodo algebrico generale per ricavare le equazioni di stato del circuito. Una volta ottenuta $v_C(t)$ risolvendo l'equazione con i metodi già visti è poi possibile determinare qualsiasi grandezza del circuito originario risolvendo il circuito resistivo associato. Di conseguenza, ogni grandezza del circuito di figura (a) è esprimibile in funzione della grandezza di stato attraverso solo *relazioni di tipo algebrico*.
Vogliamo ora mostrare come si estende la procedura che abbiamo appena introdotto al caso di un circuito del secondo ordine facendo riferimento all'esempio mostrato nella figura che segue [(a)].



Esso è un circuito *RLC* del secondo ordine con un generatore indipendente di tensione; i resistori, il condensatore e l'induttore sono tempo-invarianti. L'estensione dei risultati che otterremmo a situazioni più generali non presenta alcuna difficoltà.
Il circuito in figura (a) ha due variabili di stato: l'intensità di corrente dell'induttore, $i_L = i_L(t)$, e la tensione del condenzatore, $v_C = v_C(t)$. Il circuito resistivo associato, in figura (b), è ottenuto sostituendo al condensatore il generatore di tensione $v_C(t)$ e all'induttore il generatore di corrente $i_L(t)$. Attraverso di esso è possibile esprimere ogni grandezza del circuito (a) in funzione delle grandezze di stato e della tensione del generatore di tensione.
Con le convenzioni fissate, le relazioni caratteristiche dei bipoli dinamici sono:

$$C\frac{dv_C}{dt} = -i_C,$$

$$L\frac{di_L}{dt} = -v_L.$$

Per ottenere le equazioni di stato bisogna esprimere l'intensità di corrente del condensatore e la tensione dell'induttore in funzione delle grandezze di stato del circuito. Queste relazioni posono essere facilmente ottenute risolvendo il circuito resistivo associato. Applicando la sovrapposizione degli effetti abbiamo:

$$i_C = \frac{v_C}{R} - i_L - \frac{e}{R}, \qquad v_L = v_C + Ri_L.$$

CONTINUITÀ DELLE GRANDEZZE DI STATO

Una proprietà molto importante delle grandezze di stato di un circuito è che esse sono continue. In altri termini, anche laddove per via di generatori con comportamenti discontinui o di interruttori alcune grandezze del circuito possono subire dei salti di discontinuità, ciò non accade mai per le grandezze di stato. Questa proprietà, detta *proprietà di continuità delle variabili di stato*, è molto importante e assai utile nella soluzione dei circuiti dinamici. Essa può essere dimostrata attraverso un ragionamento che è allo stesso tempo semplice e "rigoroso".

Le variabili di stato di un circuito sono necessariamente limitate, altrimenti l'energia immagazzinata nel circuito sarebbe infinita e ciò non può accadere.

Ad esempio per il condensatore la tensione dovrà essere limitata. Abbiamo visto, utilizzando il concetto di circuito resistivo associato, che l'intensità di corrente di un generico condensatore di un circuito dinamico può essere sempre espressa attraverso una combinazione lineare di tipo algebrico delle grandezze di stato del circuito e delle grandezze impresse dai generatori indipendenti. Allora, nell'ipotesi che le grandezze impresse dai generatori indipendenti sono limitate, segue necessariamente che anche l'intensità di corrente del condensatore è limitata. Si osservi che questa proprietà non vale se in parallelo al condensatore c'è un interruttore che si chiude.

Un analogo risultato vale per le tensioni egli induttori, se non vi sono interruttori in serie ad essi che si aprono.

Analizzeremo il comportamento della tensione in un intorno di ampiezza Δt di un generico istante $\hat{t}$ nell'ipotesi che l'intensità di corrente, pur potendo avere dei salti di discontinuità, sia limitata in ogni istante.

La relazione caratteristica del condensatore in forma integrale è:

$$v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\tau)d\tau.$$

Posto $t_0 = \hat{t} - \frac{\Delta t}{2}$ e $t = \hat{t} + \frac{\Delta t}{2}$, si ha:

$$v_C\left(\hat{t} + \frac{\Delta t}{2}\right) - v_C\left(\hat{t} - \frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{1}{C}\int_{\hat{t}-\frac{\Delta t}{2}}^{\hat{t}+\frac{\Delta t}{2}} i_C(\tau)d\tau.$$

Se a questo punto si fa tendere l'ampiezza dell'intervallo Δt ad un valore arbitrariamente piccolo (ma sempre maggiore di zero), si ottiene:

$$v_C(\hat{t}^+) - v_C(\hat{t}^-) = \frac{1}{C}\int_{\hat{t}^-}^{\hat{t}^+} i_C(\tau)d\tau = 0.$$

Difatti al secondo membro di questa equazione troviamo un integrale definito su un intervallo di ampiezza che tende a zero ed essendo $i_C(t)$ limitata, l'integrale non può che essere nullo.

L'integrale definito come:

$$\int_{\hat{t}-\frac{\Delta t}{2}}^{\hat{t}+\frac{\Delta t}{2}} i_C(\tau)d\tau,$$

non è altro che l'area sottesa, nel piano (t, i_C) dalla curva $i_C(t)$ nell'intervallo $(\hat{t} - \Delta t/2, \hat{t} + \Delta t/2)$. Tale area tende a zero per Δt che tende a zero sia quando la funzione $i_C(t)$ è continua in $\hat{t}$, sia quando essa ha una discontinuità di prima specie.

Con un ragionamento analogo è possibile mostrare che l'intensità di corrente di un particolare induttore è una funzione continua del tempo.

Una conseguenza importante della continuità della tensione dei condensatori e dell'intensità di corrente degli induttori è che risulta continua l'energia immagazzinata in questi due elementi dinamici.