Esercizi svolti di teoria dei segnali

Alessia De Rosa

Mauro Barni

Novembre 2003

Indice

Introduzione **ii**

1 Caratteristiche dei segnali determinati **1**

2 Sviluppo in Serie di Fourier di segnali periodici **11**

3 Trasformata di Fourier **23**

4 Sistemi Lineari Tempo Invarianti **44**

5 Campionamento **56**

6 Processi stocastici **69**

Introduzione

Obiettivo di queste dispense è quello di aiutare lo studente che affronta l'esame di Teoria dei Segnali ad applicare i concetti teorici (che si suppone abbia studiato !) alla soluzione di esercizi. L'importanza di tale passaggio risiede nel fatto che solo avendo capito a fondo i concetti teorici è possibile utilizzarli per risolvere gli esercizi: in altre parole la risoluzione degli esercizi è una misura di quanto lo studente abbia davvero compreso la materia.

Le dispense sono organizzate nel seguente modo:

- un capitolo per ciascuno degli argomenti trattati durante il corso (Processi Stocastici esclusi);
- indicazione degli argomenti trattati all'inizio di ogni capitolo;
- differenti tipologie di esercizi: esercizi svolti in modo dettagliato; esercizi svolti più rapidamente; esercizi proposti da svolgere.

Per chiarezza in Tabella 1 sono stati riportati i principali simboli che verranno utilizzati nel corso degli esercizi, e la loro spiegazione. Se da una parte si è cercato di rifarsi alla simbologia solitamente usata durante il corso di Teoria dei Segnali, dall'altra parte si presuppone che il lettore vada al sodo senza lasciarsi sviare da una differente simbologia!

Si riportano di seguito alcune importanti formule di trigonometria, che possono risultare utili:

$$
\begin{aligned}
\cos(t_1 \pm t_2) &= \cos t_1 \cos t_2 \mp \sin t_1 \sin t_2 \\
\sin(t_1 \pm t_2) &= \sin t_1 \cos t_2 \pm \sin t_2 \cos t_1 \\
\cos t_1 \cos t_2 &= \frac{1}{2}\left[\cos(t_1 - t_2) + \cos(t_1 + t_2)\right] \\
\sin t_1 \sin t_2 &= \frac{1}{2}\left[\cos(t_1 - t_2) - \cos(t_1 + t_2)\right] \\
\sin t_1 \cos t_2 &= \frac{1}{2}\left[\sin(t_1 - t_2) + \sin(t_1 + t_2)\right]
\end{aligned}
$$

Inoltre, viene fatto un breve richiamo sulla rappresentazione di un numero complesso. Un generico numero complesso c può essere espresso mediante la sua parte reale e la sua

$\mathbb{N}$	insieme dei numeri naturali
$\mathbb{Z}$	insieme dei numeri interi relativi
$\Re\{\cdot\}$	parte reale di un numero/segnale complesso
$\Im\{\cdot\}$	parte immaginaria di un numero/segnale complesso
$\lVert\cdot\rVert$	ampiezza di un numero/segnale complesso
$\angle\cdot$	fase di un numero/segnale complesso
$\lvert\cdot\rvert$	valore assoluto di un numero/segnale reale
$\mathcal{F}\{\cdot\}$	Trasformata di Fourier
$\rightleftharpoons$	relazione tra un segnale e la relativa Trasformata di Fourier
$E[\cdot]$	operatore valore atteso
$\mathcal{H}\{\cdot\}$	Trasformata di Hilbert

Tabella 1: Tabella con i simboli più usati e la loro spiegazione

parte immaginaria oppure mediante la sua ampiezza e fase:

$$c = \begin{cases} \Re\{c\} + j\Im\{c\} \\ \lVert c\rVert e^{j\angle c} \end{cases}$$

Questa seconda rappresentazione (detta forma esponenziale) risulta particolarmente utile per eseguire calcoli sui numeri complessi. Si ricorda che un generico esponenziale complesso può essere scritto come:

$$e^{\pm j\phi} = \cos(\phi) \pm j\sin(\phi)$$

da cui si ricavano facilmente le formule di Eulero:

$$\cos(\phi) = \frac{e^{+j\phi} + e^{-j\phi}}{2}$$
$$\sin(\phi) = \frac{e^{+j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}$$

Posto $\rho = \lVert c\rVert$ e $\phi = \angle c$, il numero complesso c si può quindi scrivere come:

$$c = \rho e^{j\phi} = \rho[\cos(\phi) + j\sin(\phi)]$$

Inoltre si ricavano facilmente le seguenti relazioni:

$$c_1 \cdot c_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} \cdot \rho_2 e^{j\phi_2} = (\rho_1\rho_2)e^{j(\phi_1+\phi_2)}$$
$$c_1/c_2 = \left(\rho_1 e^{j\phi_1}\right) / \left(\rho_2 e^{j\phi_2}\right) = (\rho_1/\rho_2)\, e^{j(\phi_1-\phi_2)}$$

cioè nel caso di un prodotto (o rapporto) tra due numeri complessi, l'ampiezza del prodotto (o rapporto) è data dal prodotto (o rapporto) delle ampiezze, mentre la fase è data dalla somma (o differenza) delle fasi.

Infine si riportano di seguito la definizione e l'andamento grafico (Figura 1, Figura 2 e Figura 3) di alcuni segnali importanti:

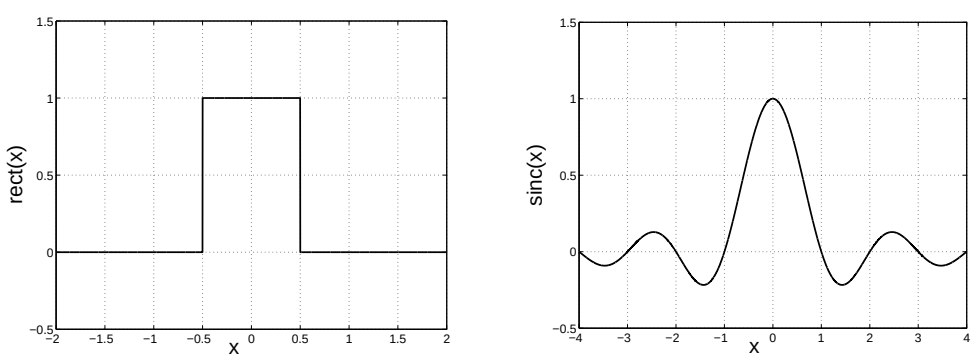
$$\mathrm{rect}(x) \triangleq \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 1/2 & |x| = 1/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathrm{sinc}(x) \triangleq \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

$$\mathrm{tr}(x) \triangleq \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathrm{sgn}(x) \triangleq \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{u}(x) \triangleq \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \\ 1/2 & x = 0 \end{cases}$$



(a) (b)

Figura 1: (a) $\mathrm{rect}(x)$ e (b) $\mathrm{sinc}(x)$

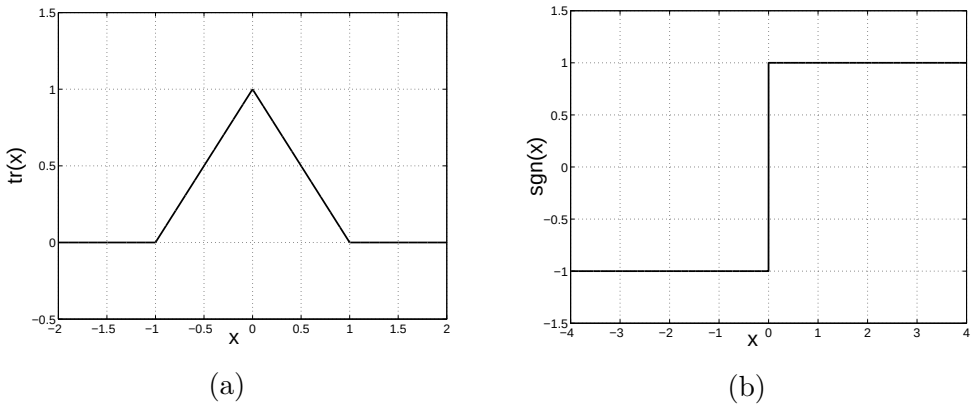


Figura 2: (a) tr(x) e (b) sgn(x)

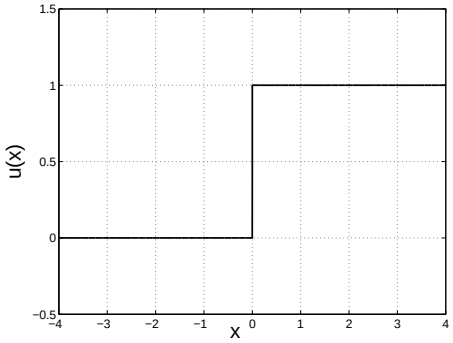


Figura 3: u(x)

Concludendo, invitiamo gli studenti che utilizzeranno queste dispense a segnalare agli autori eventuali errori presenti in esse. Nonostante l'attenzione con cui si può curare la stesura di un testo, infatti, non è mai da escludersi la possibilità che in esso siano presenti degli errori !

Capitolo 1

Caratteristiche dei segnali determinati

Problemi affrontati nel presente capitolo:

- rappresentare graficamente un segnale;
- determinare se un segnale è a energia o potenza finita;
- calcolare l'energia e/o la potenza di un segnale;
- scrivere l'espressione analitica e rappresentare graficamente un segnale, e la forma ritardata, invertita, etc. del segnale stesso;
- analizzare le proprietà di simmetria di un segnale.

Esercizio 1

Si consideri il segnale:

$$s(t) = rect\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t}$$

e si risponda alle seguenti domande:

a) rappresentare graficamente il segnale;

b) calcolare l'energia e la potenza media del segnale e discutere se $s(t)$ è un segnale a energia finita o a potenza media finita (NOTA: da ora in avanti per potenza si intenderà sempre la potenza media e non la potenza istantanea);

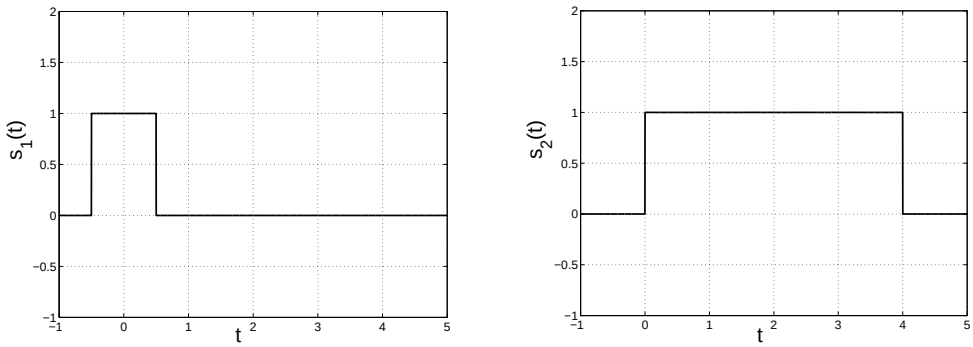
c) scrivere l'espressione analitica e rappresentare graficamente i segnali:

$$z(t) = -s(-t)$$

$$v(t) = s(t+4)$$

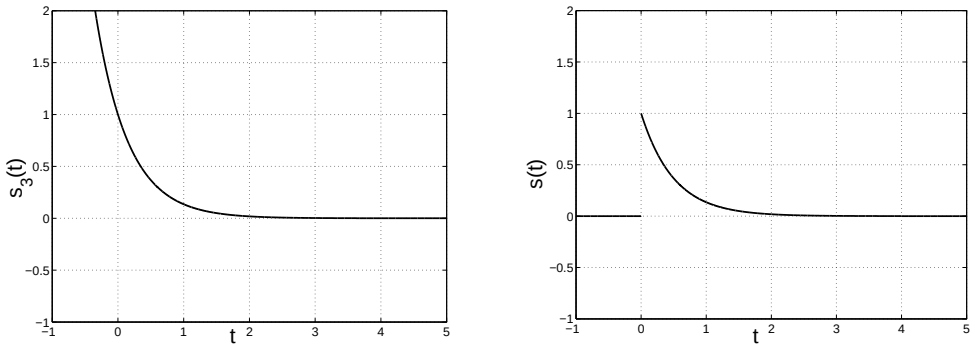
Soluzione 1

a) Nelle figure 1.1 (a) e (b) sono riportati rispettivamente il segnale $s_1(t) = rect(t)$, centrato nell'origine, con durata 1 e ampiezza 1 e il segnale $s_2(t) = rect((t-2)/4)$ pari a $s_1(t)$ traslato in $+2$, con durata 4 e ampiezza 1. Nella figura 1.2 (a) è riportato il segnale $s_3(t) = e^{-2t}$, esponenziale decrescente che si estende tra $-\infty$ e $+\infty$; ed infine nella figura 1.2 (b) è riportato il segnale $s(t)$, ovvero l'esponenziale decrescente e^{-2t} troncato tra $[0, 4]$.



(a) (b)

Figura 1.1: (a) $s_1(t) = rect(t)$; (b) $s_2(t) = rect\left(\frac{t-2}{4}\right)$



(a) (b)

Figura 1.2: (a) $s_3(t) = e^{-2t}$; (b) $s(t) = rect\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t}$

b) Per il calcolo dell'energia e della potenza si applicano le definizioni:

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \|s(t)\|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$$

$$P_s = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \|s(t)\|^2 dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |s(t)|^2 dt$$

dove $|\cdot|$ viene sostituito a $\|\cdot\|$ nel caso di segnali reali. Si verifica facilmente che il segnale $s(t)$ è un segnale a energia finita, cioè $E_s \neq \infty, E_s \neq 0$, e di conseguenza a potenza nulla. Infatti:

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{0}^{4} e^{-4t} dt = \left.\frac{e^{-4t}}{-4}\right|_0^4 = \frac{1-e^{-16}}{4} \simeq \frac{1}{4} \neq \infty$$

$$P_s = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |s(t)|^2 dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{4} e^{-4t} dt =$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} E_s = 0$$

essendo E_s finita.

Nota: considerando il segnale $s(t) = e^{-2t}$, questo risulta essere né un segnale a energia finita, né a potenza finita, infatti:

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-2t}|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4t} dt =$$

$$= \left.\frac{e^{-4t}}{-4}\right|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{T\to+\infty} \frac{e^{-T}-e^{T}}{-4} = +\infty$$

$$P_s = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-4t} dt = \lim_{T\to+\infty} \left.\frac{e^{-4t}}{-4T}\right|_{-T/2}^{+T/2} =$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{e^{-2T}-e^{2T}}{-4T} = +\infty,$$

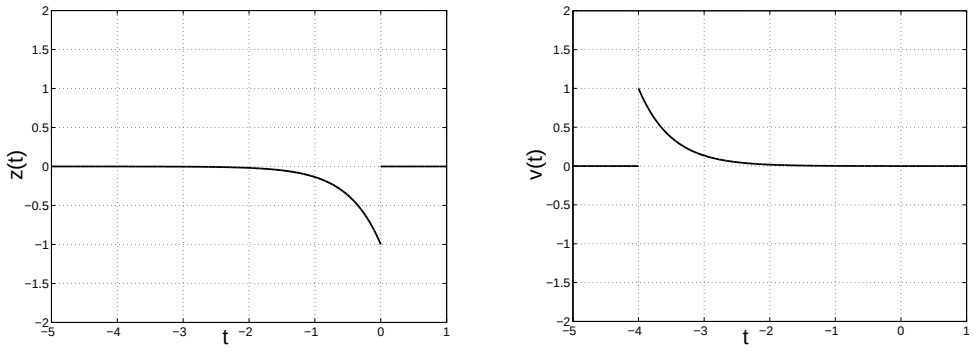
dato che per $T \to +\infty$ e^{-2T} tende a 0, e e^{2T} tende a $+\infty$ molto più rapidamente di $4T$.

c) Le espressioni analitiche dei segnali $z(t)$ e $v(t)$ si ottengono come:

$$z(t) = -\,s(-t) = -\left[rect\left(\frac{(-t)-2}{4}\right) e^{-2(-t)}\right] = -rect\left(\frac{-t-2}{4}\right) e^{2t}$$

$$v(t) = s(t+4) = rect\left(\frac{(t+4)-2}{4}\right) e^{-2(t+4)} = rect\left(\frac{t+2}{4}\right) e^{-2(t+4)}$$

Per disegnare $z(t)$ e $v(t)$ si possono considerare le espressioni analitiche trovate, oppure notare che il segnale $z(t)$ non è altro che la riflessione rispetto all'origine e l'inversione del segnale $s(t)$, mentre il segnale $v(t)$ è il segnale $s(t)$ anticipato di 4. In figura 1.3 sono riportati i due segnali.



(a) (b)

Figura 1.3: (a) $z(t) = -s(-t)$; (b) $v(t) = s(t+4)$

Esercizio 2

Si consideri il segnale:

$$s(t) = sgn\left(a \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)\right)$$

e si risponda alle seguenti domande:

a) rappresentare graficamente il segnale;

b) calcolare l'energia e la potenza del segnale e discutere se è un segnale a energia finita o a potenza finita.

Soluzione 2

a) Il segnale $a \cdot cos((2\pi/T_0)t)$ è un segnale periodico di periodo T_0 e ampiezza a. Ponendo ad esempio $T_0 = 4$ e $a = 0.3$ l'andamento del *cos* è riportato in figura 1.4 (linea tratteggiata). La funzione *sgn* vale +1 quando l'argomento è > 0 e -1 quando è < 0. Il segnale $s(t)$ risulta quindi quello riportato in figura 1.4 (linea continua).

b) I segnali periodici sono segnali a energia infinita; indicando con T_0 il periodo del

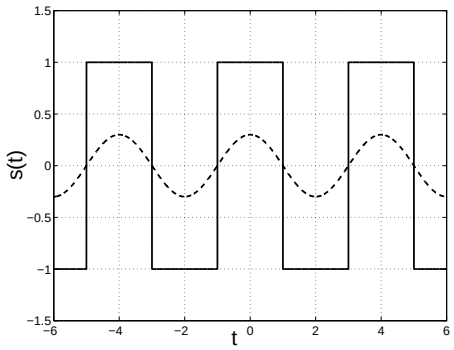


Figura 1.4: (linea tratteggiata) $a \cdot cos((2\pi/T_0)t)$ con $T_0 = 4$ e $a = 0.3$; (linea continua) $s(t)$

segnale, dalla definizione si ottiene:

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \lim_{T \to +\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} |s(t)|^2 dt =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \int_{-nT_0/2}^{+nT_0/2} |s(t)|^2 dt = \lim_{n \to +\infty} n \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |s(t)|^2 dt = \infty$$

avendo supposto $\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |s(t)|^2 dt \neq 0$. Il valore della potenza invece può essere calcolato su un periodo; partendo sempre dalla definizione si ha infatti:

$$P_s = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |s(t)|^2 dt = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{nT_0} \int_{-nT_0/2}^{+nT_0/2} |s(t)|^2 dt =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{nT_0} \cdot n \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |s(t)|^2 dt$$

Nel caso particolare dell'esercizio proposto la potenza allora risulta:

$$P_s = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} 1 dt = 1$$

e quindi il segnale in esame risulta a potenza finita.

Esercizio 3

Si consideri il segnale:

$$s(t) = 2tr\left(\frac{t}{4}\right)$$

e si risponda alle seguenti domande:

a) rappresentare graficamente il segnale;

b) calcolare l'energia e la potenza del segnale e discutere se è un segnale a energia finita o a potenza finita;

c) scrivere l'espressione analitica e rappresentare graficamente il segnale:

$$v(t) = s(2t)$$

Soluzione 3

a) In figura 1.5 è riportato il grafico del segnale $s(t)$, ovvero un triangolo centrato nell'origine, di durata 8, $[-4, 4]$, e ampiezza 2.

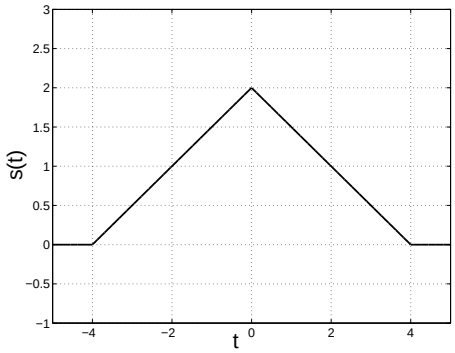


Figura 1.5: $s(t)$

b) Il segnale risulta essere a energia finita, infatti:

$$E_s = 2 \cdot \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}t + 2\right)^2 dt = 2 \cdot \left(\frac{t^3}{12} - t^2 + 4t\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3}$$

e quindi a potenza nulla $P_s = 0$.

c) Il segnale v(t) risulta:

$$v(t) = 2tr\left(\frac{t}{2}\right)$$

e il suo andamento grafico è riportato in figura 1.6. Si noti come il segnale $v(t)$ non sia altro che una compressione del segnale $s(t)$: infatti, una moltiplicazione dell'argomento per un fattore di scala > 1 implica una compressione della scala dei tempi del segnale, mentre se il fattore di scala è < 1 allora si ha una dilatazione.

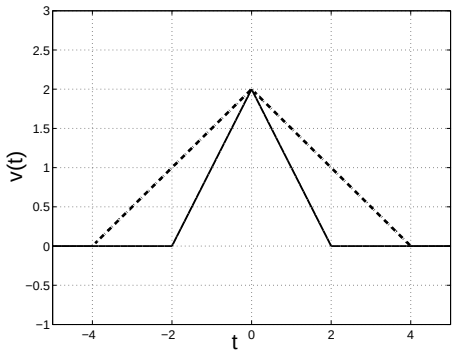


Figura 1.6: (linea continua) $v(t) = s(2t)$; (linea tratteggiata) $s(t)$

Esercizio 4

Studiare le proprietà di simmetria del segnale s(t) e scomporlo nella sua parte pari e parte dispari:

$$s(t) = t \cdot \mathrm{u}(t)$$

Soluzione 4

Un segnale reale è definito pari o dispari se soddisfa le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} s(t) \quad & \text{pari} \quad \Longleftrightarrow \quad s(t) = s(-t) \quad \forall t \\ s(t) \quad & \text{dispari} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} s(t) = -s(-t) & \forall t, t \neq 0 \\ s(t) = 0 & t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nel caso del segnale $t \cdot \mathrm{u}(t)$, $s(-t)$ vale:

$$s(-t) = -t \cdot \mathrm{u}(-t)$$

e quindi non soddisfa nessuna delle precedenti relazioni dato che $\mathrm{u}(-t) \neq \mathrm{u}(t)$. Il segnale perciò non presenta proprietà di simmetria.

Per scomporre un segnale nella sua parte pari e parti dispari si procede nel seguente modo:

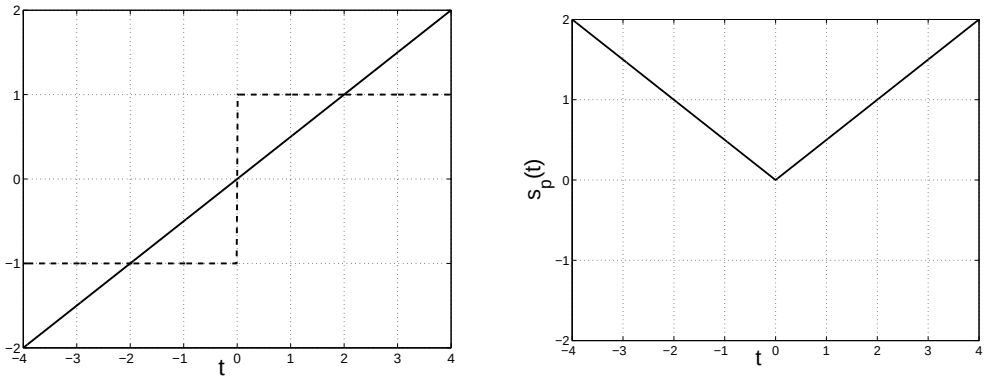
$$\begin{aligned} s_p(t) &= \frac{s(t) + s(-t)}{2} \\ s_d(t) &= \frac{s(t) - s(-t)}{2} \end{aligned}$$

e si verifica facilmente che il segnale $s(t)$ si riottiene come somma dei segnali $s_p(t)$ e $s_d(t)$.

Nel caso dell'esercizio proposto risulta quindi:

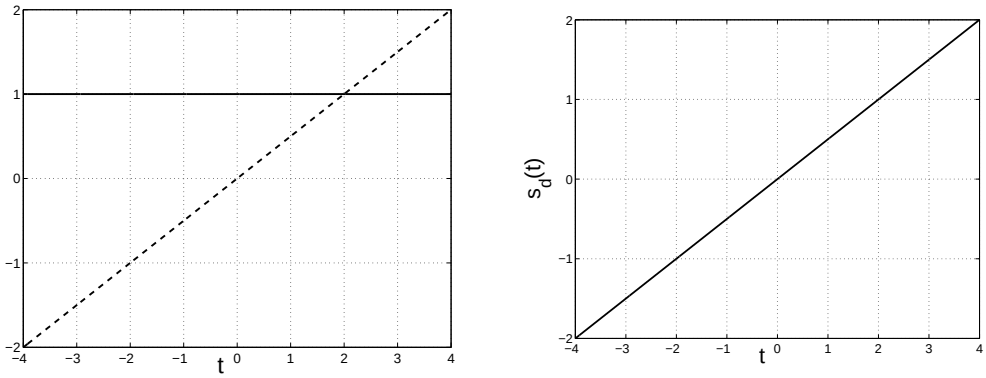
$$s_p(t) = \frac{t \cdot \mathrm{u}(t) - t \cdot \mathrm{u}(-t)}{2} = \frac{t}{2} \cdot [\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(-t)] = \frac{|t|}{2}$$
$$s_d(t) = \frac{t \cdot \mathrm{u}(t) + t \cdot \mathrm{u}(-t)}{2} = \frac{t}{2} \cdot [\mathrm{u}(t) + \mathrm{u}(-t)] = \frac{t}{2}$$

Nelle figure 1.7(b) e 1.8(b) sono riportati $s_p(t)$ e $s_d(t)$ rispettivamente, mentre in figura 1.9(b) è riportato il segnale $s(t)$ ottenuto come somma di $s_p(t)$ e $s_d(t)$ (figura 1.9(a)).



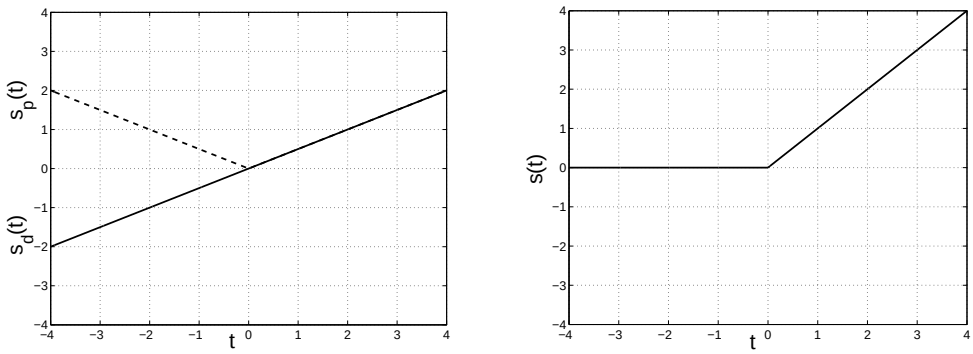
(a) (b)

Figura 1.7: (a) $\frac{t}{2}$ (linea continua) e $[\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(-t)]$ (linea tratteggiata) e (b) segnale $s_p(t) = \frac{|t|}{2}$ risultante



(a) (b)

Figura 1.8: (a) $\frac{t}{2}$ (linea tratteggiata) e $[\mathrm{u}(t) + \mathrm{u}(-t)]$ (linea continua) e (b) segnale $s_d(t) = \frac{t}{2}$ risultante



(a) (b)

Figura 1.9: (a) $s_p(t)$ (linea tratteggiata) e $s_d(t)$ (linea continua) e (b) segnale $s(t) = t \cdot \mathrm{u}(t)$

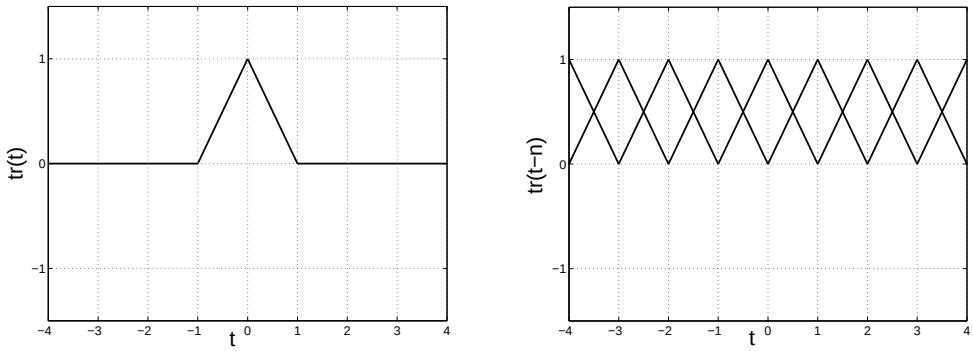
Esercizio 5

Disegnare il grafico del seguente segnale:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \mathrm{tr}(t-n)$$

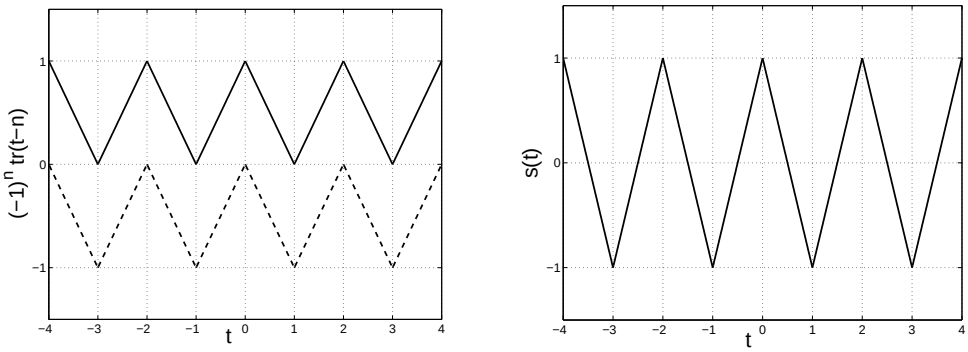
Soluzione 5

Il segnale $\mathrm{tr}(t)$ è un triangolo di durata 2 [-1,1] e ampiezza 1 (figura 1.10(a)). La sommatoria $\sum_n \mathrm{tr}(t-n)$ è la ripetizione del triangolo con passo 1 (figura 1.10(b)). Il termine $(-1)^n$ va a modificare il segno dei triangoli ripetuti per n dispari (figura 1.11(a)). Infine il grafico del segnale si ottiene sommando punto a punto le due forme d'onda in figura 1.11(a) , ottenendo così l'andamento riportato in figura 1.11(b).



(a) (b)

Figura 1.10: (a) $\mathrm{tr}(t)$ e (b) $\sum_n \mathrm{tr}(t-n)$



(a) (b)

Figura 1.11: (a) $\sum_n \mathrm{tr}(t-n)$ per n pari (linea continua) e $\sum_n -\mathrm{tr}(t-n)$ per n dispari (linea tratteggiata) e (b) grafico finale del segnale $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \mathrm{tr}(t-n)$

Altri esercizi

1. Disegnare il grafico dei seguenti segnali:

   a) $\mathrm{rect}(t) - \mathrm{rect}(t-1)$

   b) $\mathrm{tr}(t) \cdot \mathrm{rect}(t)$

   c) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \mathrm{rect}\left(t - \frac{3}{4}n\right)$

   d) $1 + \mathrm{sgn}(1-t)$

   e) $\mathrm{sinc}(t) \cdot \mathrm{sgn}(t)$

   f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{n}\right)$

2. Calcolare energia e potenza dei seguenti segnali:

   a) $A\cos(2\pi f_0 t + \phi_0) + B\cos(2\pi f_1 t + \phi_1)$

   b) $e^{-t}\cos(t)\mathrm{u}(t)$

   c) $e^{-t}\cos(t)$

   d) $e^{-t} \cdot rect\left(\frac{t-1}{2}\right) - e^{-t} \cdot rect\left(\frac{t-3}{2}\right)$

3. Studiare la simmetria dei seguenti segnali e scomporli in parte pari e parte dispari:

   a) $e^{-t}\mathrm{u}(t) - e^{-t}\mathrm{u}(-t)$

   b) $e^{-|t|}$

   c) $\begin{cases} \frac{t}{|t|} & t \neq 0, \\ 0 & t = 0. \end{cases}$

   d) $sen(t) + cos(t)$

Capitolo 2

Sviluppo in Serie di Fourier di segnali periodici

Problemi affrontati nel presente capitolo:

- calcolare i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier;
- scrivere l'espressione analitica dello spettro di ampiezza e di fase;
- rappresentare graficamente lo spettro di ampiezza e di fase;
- applicazione del teorema di *Parseval* per la serie di Fourier.

Esercizio 1

Si consideri il segnale *dente di sega* rappresentato in figura 2.1 e si risponda alle seguenti domande:

a) calcolare i coefficienti della serie di Fourier;

b) scrivere l'espressione analitica dello spettro di ampiezza e di fase;

c) rappresentare graficamente lo spettro di ampiezza e di fase.

Soluzione 1

In generale un segnale periodico può essere visto come la ripetizione, con passo T, del corrispondente segnale troncato nel periodo $[-T/2, T/2]$. Nel caso specifico del segnale *dente di sega*, il segnale troncato risulta essere:

$$s_T(t) = \frac{A}{T/2} t \qquad |t| < T/2$$

riportato anche in figura 2.1, dove si è posto $T = 6$ e $A = 2$.

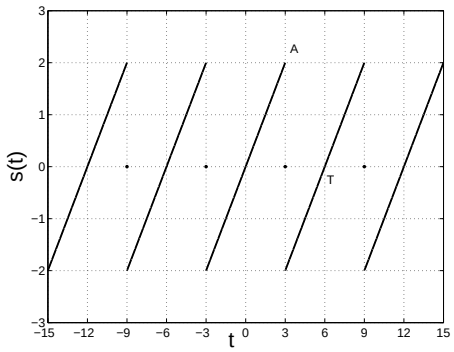


Figura 2.1: Segnale $s(t)$ *dente di sega* con periodo $T = 6$ e ampiezza $A = 2$

a) Per calcolare lo sviluppo in serie di Fourier si considera la forma esponenziale della serie e cioè:

$$\begin{cases} s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n \frac{1}{T} t} & \text{segnale periodico con periodo } T \\ c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} dt & \text{coefficienti della serie di Fourier} \end{cases}$$

Si calcolano quindi i coefficienti c_n, per $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_n =& \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_T(t) e^{-j2\pi n \frac{1}{T} t} dt = \frac{1}{T} \frac{A}{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} t e^{-j2\pi n \frac{1}{T} t} dt = \\ =& \frac{2A}{T^2} \left\{ t \frac{e^{-j2\pi n \frac{1}{T} t}}{-j2\pi n \frac{1}{T}} \Bigg|_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{-j2\pi n \frac{1}{T} t}}{-j2\pi n \frac{1}{T}} dt \right\} = \\ =& \frac{2A}{T^2} \left\{ \frac{T}{2} \frac{e^{-j2\pi \frac{n}{T} \frac{T}{2}} + e^{-j2\pi \frac{n}{T} \frac{T}{2}}}{-j2\pi \frac{n}{T}} + \frac{1}{j2\pi \frac{n}{T}} \frac{e^{-j2\pi \frac{n}{T} t}}{-j2\pi \frac{n}{T}} \Bigg|_{-T/2}^{T/2} \right\} = \\ =& \frac{2A}{T^2} \left\{ -\frac{T}{j2\pi \frac{n}{T}} \cos(n\pi) + \frac{e^{-j2\pi \frac{n}{T} \frac{T}{2}} - e^{j2\pi \frac{n}{T} \frac{T}{2}}}{(2\pi \frac{n}{T})^2} \right\} = \\ =& \frac{2A}{T^2} \left\{ -\frac{T^2}{j2\pi n} \cos(n\pi) + \frac{-2j \sin(n\pi)}{(2\pi \frac{n}{T})^2} \right\} = j \frac{A}{n\pi} \cos(n\pi) \end{aligned}$$

Il coefficiente c_0 rappresenta il valor medio del segnale $s_T(t)$, che in questo caso, trattandosi di un segnale dispari, risulta nullo, infatti:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_T(t) dt = \frac{2A}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} t \; dt = 0$$

(l'integrale di un segnale dispari su un periodo produce un risultato pari a 0). I

coefficienti c_n possono essere quindi espressi come:

$$c_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ j\frac{A}{\pi}\frac{(-1)^n}{n} & n \neq 0 \end{cases}$$

essendo $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

b) In generale i coefficienti c_n della serie di Fourier sono complessi. Un generico numero complesso c può essere espresso mediante la sua parte reale e parte immaginaria oppure mediante la sua ampiezza e fase:

$$c = \begin{cases} \Re\{c\} + j\Im\{c\} \\ \|c\|e^{j\angle c} \end{cases}$$

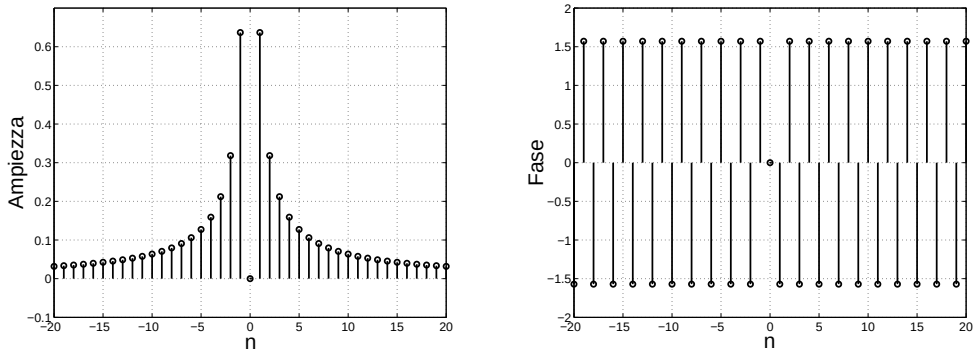
Solitamente per rappresentare graficamente la serie di Fourier, si considera la rappresentazione in ampiezza e fase, ottenendo così lo spettro di ampiezza e lo spettro di fase del segnale periodico $s(t)$. Nel caso specifico dell'esercizio si ha:

$$c_n = j\frac{A}{\pi}\frac{(-1)^n}{n} = \frac{A}{\pi|n|}\text{sign}\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}j$$

e ricordando che $\pm j = e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} \pm j\sin\frac{\pi}{2}$, si arriva a:

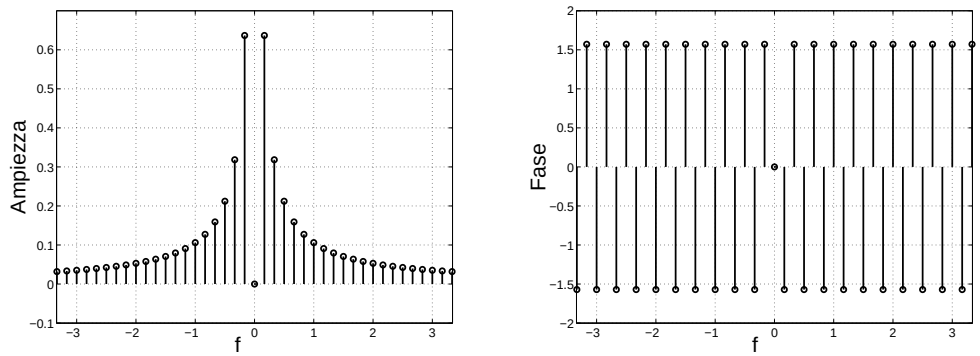
$$\|c_n\| = \frac{A}{\pi|n|}$$
$$\angle c_n = \text{sign}\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}\frac{\pi}{2}$$

c) Infine, per disegnare gli spettri di ampiezza e di fase basta riportare i valori assunti rispettivamente da $\|c_n\|$ e $\angle c_n$ al variare di n, come mostrato in figura 2.2. Gli



(a) (b)

Figura 2.2: (a) Spettro di ampiezza e (b) spettro di fase del segnale $s(t)$ *dente di sega* ($T = 6$, $A = 2$) in funzione del campione n



(a) (b)

Figura 2.3: (a) Spettro di ampiezza e (b) spettro di fase del segnale $s(t)$ *dente di sega* ($T = 6$, $A = 2$) in funzione della frequenza f

stessi grafici possono essere riportati anche in funzione della frequenza, ricordando che le righe spettrali sono poste nei multipli interi della frequenza fondamentale: $nf_0 = n/T$ (figura 2.3)).

Nota: il segnale considerato $s(t)$ è un segnale reale e dispari. I coefficienti della serie di Fourier ottenuti sono una sequenza di campioni immaginari puri. Si può ricavare facilmente che la serie di Fourier corrispondente al segnale $s(t)$ può essere espressa come serie di soli seni:

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n\neq 0, n=-\infty}^{\infty} j\frac{A}{\pi}\frac{(-1)^n}{n} e^{j2\pi\frac{n}{T}t} = \\ &= \sum_{n\neq 0, n=-\infty}^{\infty} j\frac{A}{\pi}\frac{(-1)^n}{n}\left[\cos(2\pi\frac{n}{T}t) + j\sin(2\pi\frac{n}{T}t)\right] = \\ &= \frac{-2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(2\pi\frac{n}{T}t) \end{aligned}$$

Inoltre gli spettri di ampiezza e di fase hanno andamento rispettivamente pari e dispari: i campioni della serie di Fourier godono quindi della simmetria Hermetiana. Infine i campioni $\|c_n\|$ vanno a 0 come $1/n$, e questo è in accordo col fatto che il segnale $s(t)$ presenta delle discontinuità.

Esercizio 2

Si consideri il segnale $s(t)$ *onda triangolare* rappresentato in figura 2.4 e si risponda alle seguenti domande:

a) calcolare i coefficienti della serie di Fourier;

b) scrivere l'espressione analitica e rappresentare graficamente gli spettri di ampiezza e di fase;

c) calcolare i coefficienti della serie di Fourier del segnale $s'(t) = s(t) - A/2$;

d) calcolare i coefficienti della serie di Fourier del segnale $s''(t) = s(t - \tau/2)$.

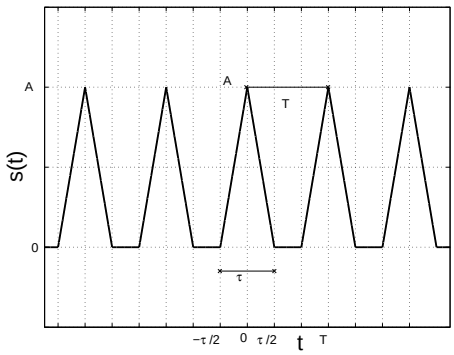


Figura 2.4: Segnale $s(t)$ *onda triangolare* con periodo T, durata τ, e ampiezza A

Soluzione 2

Il segnale periodico $s(t)$ è la ripetizione, con passo T, del *triangolo* di durata τ e ampiezza A:

$$s_T(t) = \begin{cases} A\left[1 - \frac{2}{\tau}|t|\right] & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Calcoliamo i coefficienti c_n della serie di Fourier, per $n \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
c_n =& \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_T(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}dt = \frac{A}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\left[1-\frac{2}{\tau}|t|\right]e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}dt = \\
=& \frac{A}{T}\left\{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}dt + \int_{-\tau/2}^{0}\frac{2}{\tau}te^{-j2\pi\frac{n}{T}t}dt - \int_{0}^{\tau/2}\frac{2}{\tau}te^{-j2\pi\frac{n}{T}t}dt\right\} = \\
=& \frac{A}{T}\left.\frac{e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}}{-j2\pi\frac{n}{T}}\right|_{-\tau/2}^{\tau/2} + \frac{A}{T}\frac{2}{\tau}\left[t\left.\frac{e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}}{-j2\pi\frac{n}{T}}\right|_{-\tau/2}^{0} - \left.\frac{e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}}{(-j2\pi\frac{n}{T})^2}\right|_{-\tau/2}^{0}\right] - \\
&- \frac{A}{T}\frac{2}{\tau}\left[t\left.\frac{e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}}{-j2\pi\frac{n}{T}}\right|_{0}^{\tau/2} - \left.\frac{e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}}{(-j2\pi\frac{n}{T})^2}\right|_{0}^{\tau/2}\right] = \\
=& \frac{A}{T}\left[\frac{e^{-j2\pi\frac{n}{T}\frac{\tau}{2}} - e^{j2\pi\frac{n}{T}\frac{\tau}{2}}}{-j2\pi\frac{n}{T}}\right] + \frac{A}{T}\frac{2}{\tau}\frac{\tau}{2}\left[\frac{e^{j2\pi\frac{n}{T}\frac{\tau}{2}}}{-j2\pi\frac{n}{T}}\right] - \frac{A}{T}\frac{2}{\tau}\left[\frac{1-e^{j2\pi\frac{n}{T}\frac{\tau}{2}}}{(-j2\pi\frac{n}{T})^2}\right] - \\
&- \frac{A}{T}\frac{2}{\tau}\frac{\tau}{2}\left[\frac{e^{-j2\pi\frac{n}{T}\frac{\tau}{2}}}{-j2\pi\frac{n}{T}}\right] + \frac{A}{T}\frac{2}{\tau}\left[\frac{e^{-j2\pi\frac{n}{T}\frac{\tau}{2}}-1}{(-j2\pi\frac{n}{T})^2}\right] = \\
=& \frac{A}{T}\frac{2}{\tau}\left[\frac{2\cos\left(2\pi\frac{n}{T}\frac{\tau}{2}\right)-2}{(-j2\pi\frac{n}{T})^2}\right] = \frac{A}{T}\frac{4}{\tau}\frac{\left[-2\sin^2\left(\pi\frac{n}{T}\frac{\tau}{2}\right)\right]}{(-j2\pi\frac{n}{T})^2} = \frac{A}{T}\frac{\tau}{2}\left[\frac{\sin\left(\pi\frac{n}{T}\frac{\tau}{2}\right)}{\pi\frac{n}{T}\frac{\tau}{2}}\right]^2
\end{aligned}
$$

Ricordando che il segnale $\mathrm{sinc}(x)$ è definito come

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

i coefficienti c_n si possono anche riscrivere come:

$$c_n = \frac{A}{T}\frac{\tau}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{T}\frac{\tau}{2}\right)$$

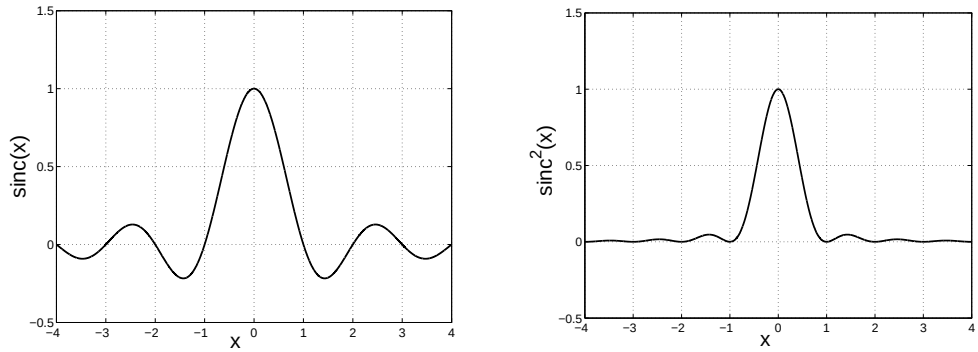
Il coefficiente c_0 in questo caso assume un valore diverso da 0 essendo il segnale $s_T(t)$ a valor medio non nullo; in particolare si può facilmente ricavare:

$$c_0 = \frac{A}{T}\frac{\tau}{2}$$

sia calcolando il valor medio del segnale $s_T(t)$, (cioè l'area del triangolo $A\tau/2$ diviso il periodo T), sia considerando che sinc(0)=1. In figura 2.5 sono riportati gli andamenti delle funzioni $\mathrm{sinc}(x)$ e $\mathrm{sinc}^2(x)$ rispettivamente.

b) Gli andamenti degli spettri di ampiezza e di fase del segnale $s(t)$ con $T = 6$, $\tau = 4$ e $A = 2$, sono riportati in figura 2.6; i coefficienti c_n in questo caso sono una sequenza di campioni reali e positivi, per cui si ha:

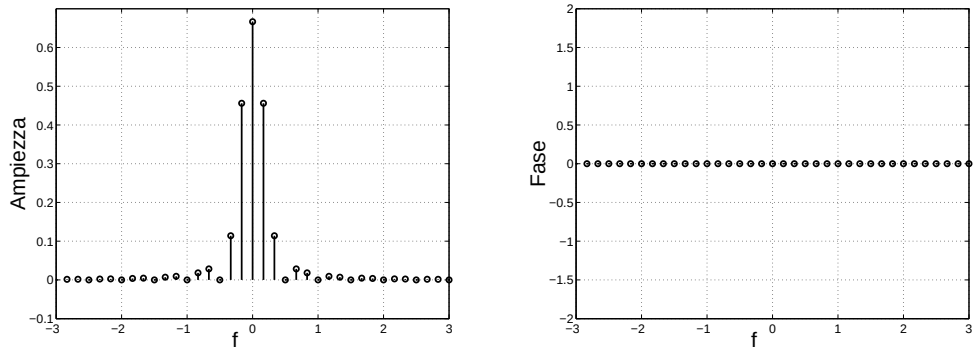
$$
\begin{aligned}
&\|c_n\| = c_n = \frac{A}{T}\frac{\tau}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{T}\frac{\tau}{2}\right) \\
&\angle c_n = 0
\end{aligned}
$$



(a) (b)

Figura 2.5: (a) $\text{sinc}(x)$ e (b) $\text{sinc}^2(x)$

cioè lo spettro di fase assume valore costante pari a 0, mentre lo spettro di ampiezza segue l'andamento del $\text{sinc}^2(\cdot)$.



(a) (b)

Figura 2.6: (a) Spettro di ampiezza e (b) spettro di fase del segnale $s(t)$ *onda triangolare*, con $T = 6$, $\tau = 4$ e $A = 2$, in funzione della frequenza f

Nota(1): per le proprietà del segnale sinc (o equivalentemente del segnale sinc^2) vale che:

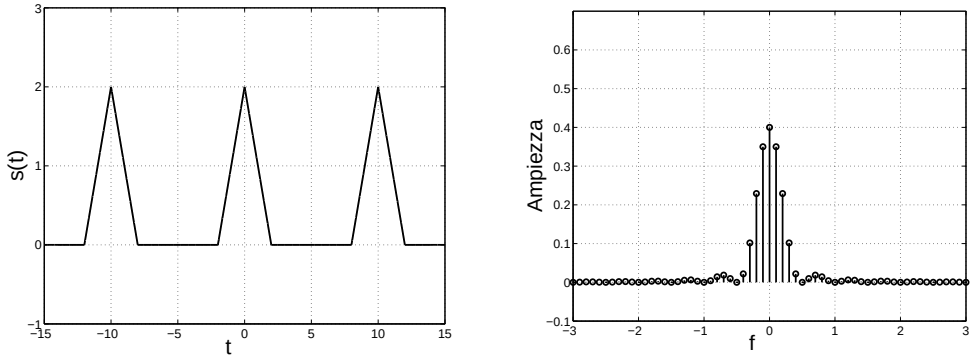
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \begin{cases} = 1 & x = 0 \\ = 0 & x \text{ intero}, \ x \neq 0 \\ \neq 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In particolare, quindi, i coefficienti c_n assumono valore nullo quando l'argomento del sinc^2 è un intero diverso da 0:

$$\frac{n}{T}\frac{\tau}{2} = k, \quad k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$$

e quindi per n intero:

$$n = k\frac{2T}{\tau}, \quad k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$$



(a) (b)

Figura 2.7: (a) Segnale $s(t)$ *onda triangolare* con periodo $T = 10$ ($\tau = 4$, $A = 2$) e (b) relativo spettro di ampiezza in funzione della frequenza f

Si noti che potrebbero anche non esistere coefficienti a valore nullo nel caso in cui la precedente relazione non produca mai un numero intero, e cioè se: $k\frac{2T}{\tau} \notin \mathbb{Z}$, $\forall k$.

Nota(2): se si considera un periodo $T = 10$ anziché $T = 6$, si ottengono gli andamenti per $s(t)$ e c_n riportati in figura 2.7. Laddove si è avuto un aumento del periodo T che ha provocato un distanziamento maggiore tra le ripetizioni del triangolo, si è avuto un infittimento delle righe spettrali. In altre parole, mentre l'inviluppo del sinc^2 è rimasto invariato, la densità delle righe spettrali presenti è aumentata. Ovviamente vale anche il viceversa: se si considera un periodo $T' < T$ (triangoli più ravvicinati), si avranno delle righe spettrali più distanziate tra di loro.

Nota(3): il segnale considerato $s(t)$ è un segnale reale e pari; i coefficienti c_n risultanti sono quindi una sequenza di campioni reali e pari. Si può ricavare facilmente che in questo caso la serie di Fourier può essere espressa come serie di soli coseni:

$$c_n = c_0 + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{A}{T}\frac{\tau}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{n}{T}\frac{\tau}{2}\right)\cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)$$

Nota(4): i campioni $\|c_n\|$ vanno a 0 come $1/n^2$, e questo è in accordo col fatto che il segnale è continuo, ma con derivata prima discontinua.

c) Si consideri ora il segnale traslato $s'(t) = s(t) - A/2$, rappresentato in figura 2.8 (a):

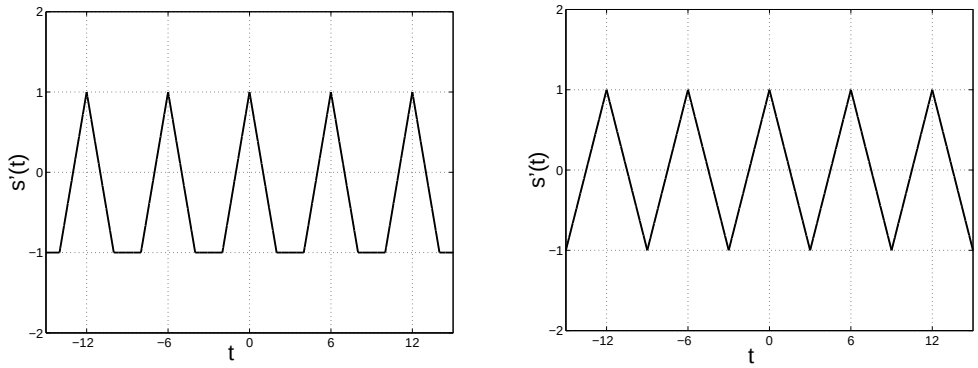
si calcolano i coefficienti c'_n della Serie di Fourier:

$$\begin{aligned}
c'_n =& \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s'(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[s(t)-\frac{A}{2}\right]e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}dt \\
=& \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}dt - \frac{A}{2}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}dt = \\
=& c_n - \frac{A}{2}\frac{1}{T}\left.\frac{e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}}{-j2\pi\frac{n}{T}}\right|_{-T/2}^{T/2} = c_n - \frac{A}{2}\mathrm{sinc}(n)
\end{aligned}$$

Dalle proprietà del segnale sinc si ricava facilmente che:

$$\begin{aligned}
c'_n &= c_n, \quad \forall n \neq 0 \\
c'_0 &= c_0 - \frac{A}{2} = \frac{A}{T}\frac{\tau}{2} - \frac{A}{2}
\end{aligned}$$

cioè la traslazione del segnale produce solo una variazione del valor medio, mentre i coefficienti della serie di Fourier rimangono inalterati.



(a) (b)

Figura 2.8: (a) Segnale $s(t)$ traslato: $s'(t) = s(t) - A/2$ con $T = 6$, $\tau = 4$, e $A = 2$ e (b) nel caso particolare $\tau = T = 6$

Nel caso particolare in cui $\tau = T$, $s'(t)$ presenta una particolare simmetria $s'(t + T/2) = -s'(t)$ (figura 2.8 (b)): un tale segnale si dice *alternativo*. In questo caso i coefficienti c'_n assumono valore nullo per n pari, infatti:

$$\begin{aligned}
&c'_n = c_n = \frac{A}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right) \quad \forall n \neq 0 \\
&c'_n = 0 \quad \forall n \text{ pari}, \quad n \neq 0 \\
&c'_0 = 0 \quad n = 0
\end{aligned}$$

d) Si consideri infine il segnale ritardato $s''(t) = s(t - A/2)$, rappresentato in figura 2.9: si calcolano i coefficienti c''_n della Serie di Fourier:

$$c''_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s''(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s\left(t - \frac{A}{2}\right) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt =$$

facendo un cambio di variabile $t - A/2 = u$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2-A/2}^{T/2-A/2} s(u) e^{-j2\pi \frac{n}{T} u} e^{-j2\pi \frac{n}{T} \frac{A}{2}} du =$$

$$= e^{-j2\pi \frac{n}{T} \frac{A}{2}} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(u) e^{-j2\pi \frac{n}{T} u} du = e^{-j2\pi \frac{n}{T} \frac{A}{2}} \cdot c_n$$

Si conclude quindi che i coefficienti della serie di Fourier di un segnale $s''(t)$ ottenuto dal segnale $s(t)$ ritardato temporalmente di una quantità t_0, sono i coefficienti c_n del segnale di partenza $s(t)$ moltiplicati per esponenziali complessi $e^{-j2\pi \frac{n}{T} t_0}$.

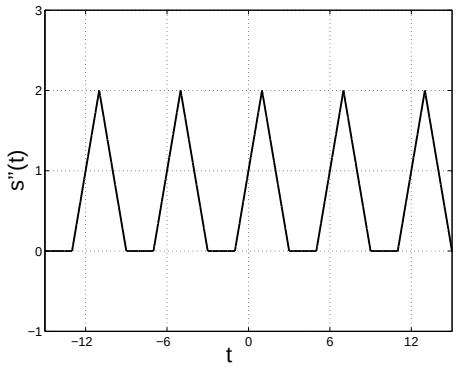


Figura 2.9: Segnale $s(t)$ ritardato: $s''(t) = s(t - A/2)$ con $T = 6$, $\tau = 4$, e $A = 2$

Esercizio 3

Determinare la potenza media del segnale $s(t)$:

$$s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

sia applicando la definizione di potenza media, sia applicando il *Teorema di Parseval* per la serie di Fourier.

Soluzione 3

Si ricordi che la potenza media di un segnale periodico può essere definita come:

$$P_s = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \|s(t)\|^2 dt$$

e che il *Teorema di Parseval* afferma che:

$$P_s = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \|s(t)\|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|c_n\|^2$$

Nel caso del $\cos(2\pi f_0 t)$ risulta dalla definizione:

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0/2}t\right)\right] dt = \\ &= \frac{1}{T_0}\frac{1}{2} \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} dt + \frac{1}{T_0}\frac{1}{2} \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0/2}t\right) dt = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

essendo nullo l'integrale del coseno di periodo $T_0/2$ integrato sul periodo T_0. Applicando il *Teorema di Parseval* si ottiene molto più rapidamente:

$$P_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|c_n\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Altri esercizi

Calcolare la Serie di Fourier dei seguenti segnali:

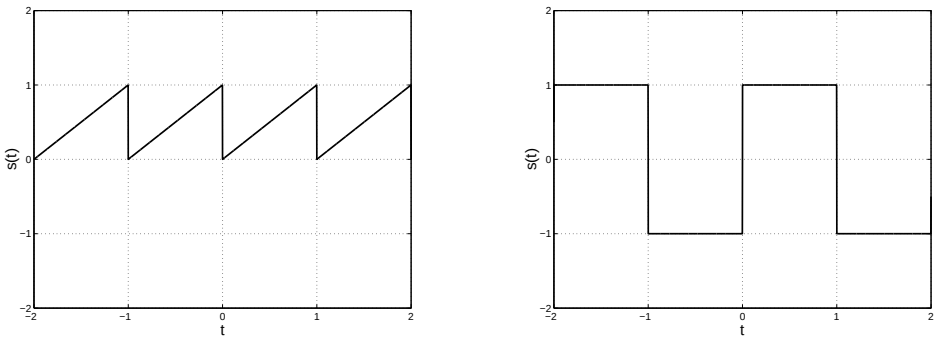
a) $s(t) = t - \lfloor t \rfloor$, figura 2.10 (a);

b) $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n rect\left(t - \frac{1}{2} - n\right)$, figura 2.10 (b);

c) $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_T(t-2n), s_T(t) = \begin{cases} t^2 & |t| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, figura 2.11(a);

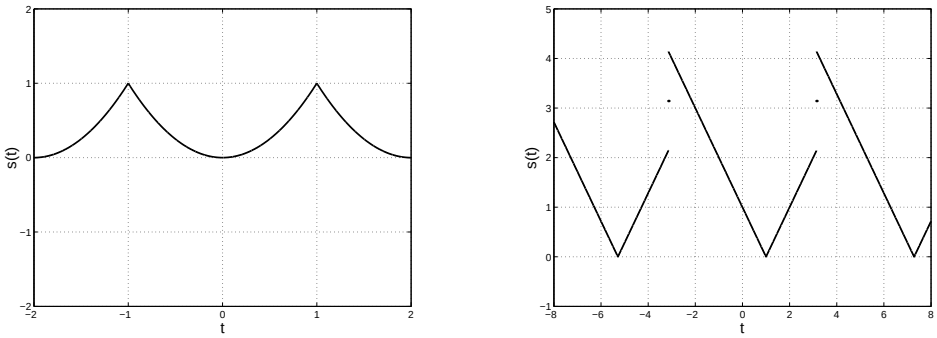
d) $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_T(t-2\pi n), s_T(t) = \begin{cases} |1-t| & |t| < \pi \\ \pi & |t| = \pi \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, figura 2.11(b);

e) $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_T(t-4n), s_T(t) = \begin{cases} 2-|t| & -1 < t < 1 \\ |t-2|-2 & 1 < t < 3 \\ 0 & t = -1, 1, 3 \end{cases}$, figura 2.12;



(a) (b)

Figura 2.10: (a) Esercizio a) ; (b) Esercizio b)



(a) (b)

Figura 2.11: (a) Esercizio c); (b) Esercizio d)

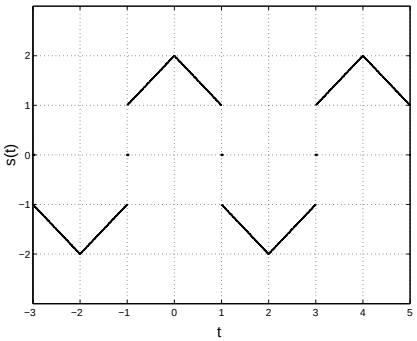


Figura 2.12: Esercizio e)

Capitolo 3

Trasformata di Fourier

Problemi affrontati nel presente capitolo:
Calcolo di trasformate di Fourier:

- dalla definizione
- usando le proprietà
- rappresentazione degli spettri di fase e di ampiezza

Prodotto di convoluzione:

- esempi di calcolo
- relazione con la trasformata di Fourier

Uso del teorema di *Parseval* e *Parseval generalizzato* per:

- calcolo dell'energia di un segnale
- calcolo di un integrale

Calcolo di trasformate di Fourier per segnali periodici:

- teorema di *Poisson*
- calcolo dei coefficienti della serie e calcolo della trasformata

Esercizio 1

Si consideri il segnale $s(t)$:

$$s(t) = e^{-\alpha t}\mathrm{u}(t)$$

con $\alpha > 0$ e si risponda alle seguenti domande:

a) calcolare la trasformata di Fourier $S(f)$;

b) calcolare la trasformata di Fourier del segnale $s_1(t) = e^{3t}\mathrm{u}(-t)$;

c) calcolare la trasformata di Fourier del segnale $s_2(t) = e^{-2t+4}\mathrm{u}(t-2)$;

d) calcolare la trasformata di Fourier del segnale $s_3(t) = e^{-t/2}cos(100\pi t)\mathrm{u}(t)$;

Soluzione 1

a) Il segnale $s(t)$ è riportato in figura 3.1. Si calcola la trasformata di Fourier partendo dalla definizione:

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{u}(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \left.\frac{e^{-(\alpha+j2\pi f)t}}{-(\alpha+j2\pi f)}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha+j2\pi f} \end{aligned}$$

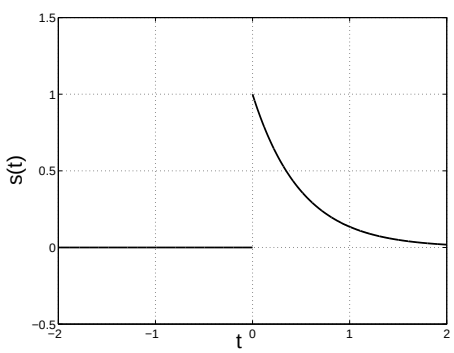


Figura 3.1: Segnale $s(t)$ con $\alpha = 2$

b) Per calcolare le trasformate dei segnali $s_1(t)$, $s_2(t)$ e $s_3(t)$ si può riapplicare la definizione oppure sfruttare le proprietà fondamentali della trasformata di Fourier; per il primo segnale risulta:

$$s_1(t) = e^{3t}\mathrm{u}(-t) = s(-t)|_{\alpha=3}$$

cioè $s_1(t)$ è la riflessione del segnale $s(t)$ con $\alpha = 3$. La sua trasformata risulta:

$$S_1(f) = S(-f)|_{\alpha=3} = \frac{1}{3-j2\pi f}$$

visto che:

$$s(-t) \rightleftharpoons S(-f)$$

c) Per il secondo segnale risulta:

$$s_2(t) = e^{-2t+4}\mathrm{u}(t-2) = e^{-2(t-2)}\mathrm{u}(t-2) = s(t-2)|_{\alpha=2}$$

cioè $s_2(t)$ è il segnale $s(t)$ ritardato di 2 con $\alpha = 2$. La sua trasformata risulta:

$$S_2(f) = S(f)e^{-j2\pi 2f} = \frac{1}{2+j2\pi f}e^{-j2\pi 2f}$$

dato che un ritardo nel tempo corrisponde ad una moltiplicazione per un esponenziale complesso in frequenza:

$$s(t \mp t_0) \rightleftharpoons S(f)e^{\mp j2\pi t_0 f}$$

d) Infine per il terzo segnale risulta:

$$s_3(t) = e^{-t/2}cos(2\pi 50t)\mathrm{u}(t) = s(t)|_{\alpha=1/2}\,\frac{e^{j2\pi 50t}+e^{-j2\pi 50t}}{2}$$

La sua trasformata risulta:

$$S_3(f) = \frac{1}{2}[S(f-50)+S(f-50)] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1/2+j2\pi(f-50)}+\frac{1}{1/2+j2\pi(f+50)}\right]$$

poiché una moltiplicazione per un esponenziale complesso nel tempo corrisponde ad un ritardo in frequenza:

$$s(t)e^{\pm j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons S(f \mp f_0)$$

Esercizio 2

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale

$$s(t) = tr(6t+24)cos(\pi t)$$

Soluzione 2

Il segnale $s_1(t) = tr(6t+24)$ è un triangolo di durata 1/3, ampiezza 1 e anticipato di 4, mentre il segnale $s_2(t) = cos(\pi t)$ è un coseno di periodo 1/2:

$$s(t) = tr(6t+24)cos(\pi t) = tr\left(\frac{t+4}{1/6}\right)cos\left(2\pi\frac{1}{2}t\right)$$

Per calcolare la trasformata di Fourier si determina prima la trasformata del segnale $s_1(t)$ che risulta:

$$S_1(f) = \mathcal{F}\left\{tr\left(\frac{t+4}{1/6}\right)\right\} = \frac{1}{6}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{6}f\right)e^{j2\pi 4f}$$

Poi, ricordando dall'esercizio precedente che la moltiplicazione per un coseno corrisponde alla moltiplicazione per due esponenziali complessi, e quindi ad un ritardo in frequenza, si ha:

$$\begin{aligned} S(f) =& \frac{S_1(f-1/2)+S_1(f+1/2)}{2} = \\ =& \frac{1}{12}\left[\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f-1/2}{6}\right)e^{j8\pi(f-1/2)} + \mathrm{sinc}^2\left(\frac{f+1/2}{6}\right)e^{j8\pi(f+1/2)}\right] \end{aligned}$$

Esercizio 3

Calcolare e rappresentare graficamente gli spettri di ampiezza e fase dei seguenti segnali:

a) $s(t) = 10\mathrm{rect}(3t)$

b) $s_1(t) = 10\mathrm{rect}\left(3t - \frac{1}{2}\right)$

Soluzione 3

a) La trasformata di Fourier del segnale rect è il segnale sinc:

$$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \rightleftharpoons A\tau\mathrm{sinc}(\tau f)$$

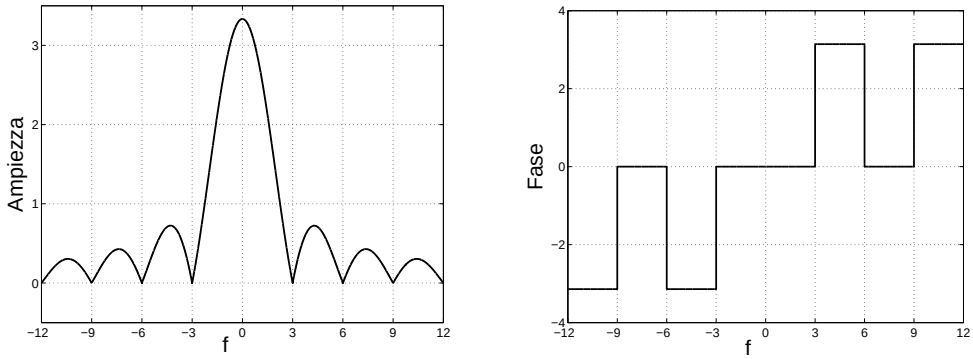
e quindi risulta:

$$\begin{aligned} S(f) =& \frac{10}{3}\mathrm{sinc}\left(\frac{f}{3}\right) = \\ =& \frac{10}{3}\left|\mathrm{sinc}\left(\frac{f}{3}\right)\right| \cdot \mathrm{sgn}\left\{\mathrm{sinc}\left(\frac{f}{3}\right)\right\} \end{aligned}$$

La funzione segno assume valori ± 1 in base all'andamento del sinc. Potendo scrivere $+1 = e^{j2k\pi}$ e $-1 = e^{j(2k+1)\pi}$ e decidendo di rappresentare la spettro di fase nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ (dato che la fase è periodica di 2π), la fase assume valori 0 quando $\mathrm{sgn}\left\{\mathrm{sinc}\left(\frac{f}{3}\right)\right\} = 1$ e π quando $\mathrm{sgn}\left\{\mathrm{sinc}\left(\frac{f}{3}\right)\right\} = -1$. Gli spettri di ampiezza e fase sono riportati in figura 3.2. Si noti come si sia scelto di rappresentare lo spettro di fase con $+\pi$ per frequenze positive e $-\pi$ per frequenze negative: questo è motivato dal fatto che nel caso di segnali reali lo spettro deve soddisfare le condizioni di simmetria hermetiana, cioè lo spettro di ampiezza deve risultare pari e quello di fase dispari.

b) Il segnale $s_1(t) = 10\mathrm{rect}\left(3t - \frac{1}{2}\right) = 10\mathrm{rect}\left(3\left(t - \frac{1}{6}\right)\right)$ non è altro che il segnale $s(t)$ ritardato di 1/6. Pertanto la trasformata di Fourier risulta:

$$S_1(f) = S(f)e^{-j2\pi\frac{1}{6}f} = \frac{10}{3}\mathrm{sinc}\left(\frac{f}{3}\right)e^{-j2\pi\frac{1}{6}f}$$



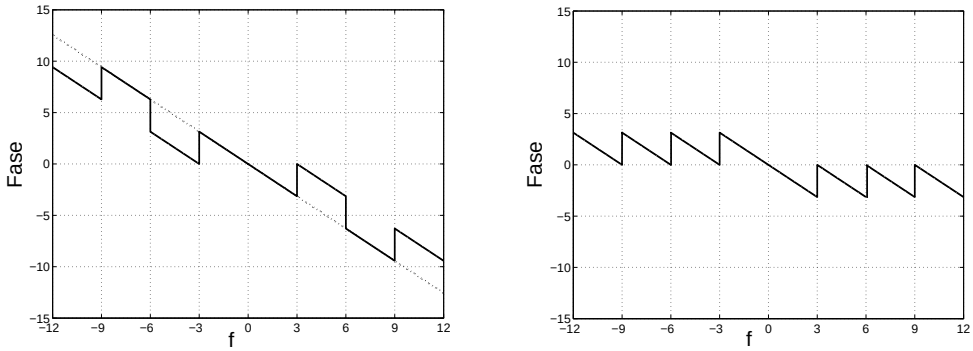
(a) (b)

Figura 3.2: (a) Spettro di ampiezza e (b) spettro di fase del segnale $s(t) = 10\text{rect}(3t)$

e quindi:

$$\|S_1(f)\| = \|S(f)\|$$
$$\angle S_1(f) = \angle S(f) - 2\pi\frac{1}{6}f$$

Per disegnare lo spettro di fase si somma $-2\pi\frac{1}{6}f$ (figura 3.3(a) tratteggiato) a $\angle S(f)$ e poi si riporta tutto nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ (figura 3.3(b)).



(a) (b)

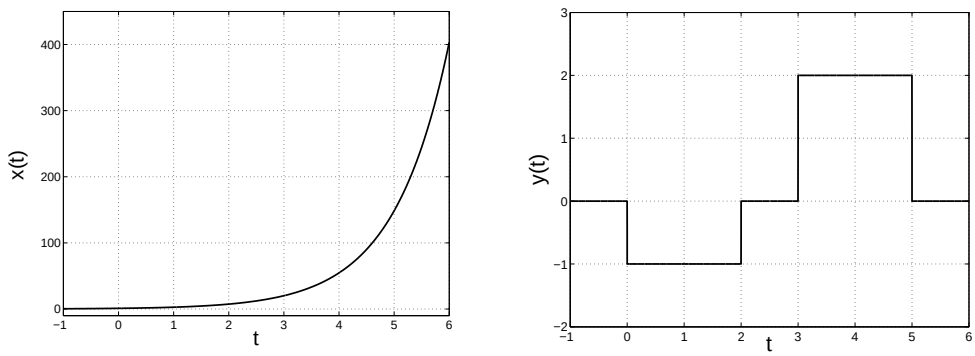
Figura 3.3: (a) Spettro di fase del segnale $s_1(t) = 10\text{rect}(3t - 1/2)$ e (b) riportato nell'intervallo $[-\pi, \pi]$

Esercizio 4

Calcolare il prodotto di convoluzione $z(t) = x(t) \otimes y(t)$ tra i seguenti segnali:

$$x(t) = e^t$$
$$y(t) = 2 \text{ rect}\left(\frac{t-4}{2}\right) - \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

Soluzione 4



(a) (b)

Figura 3.4: (a) Segnale $x(t) = e^t$ e (b) segnale $y(t) = 2 \text{ rect}\left(\frac{t-4}{2}\right) - \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$

Nelle figure 3.4 (a) e (b) sono riportati i due segnali $x(t)$ e $y(t)$ rispettivamente. Si ricorda la definizione di prodotto di convoluzione:

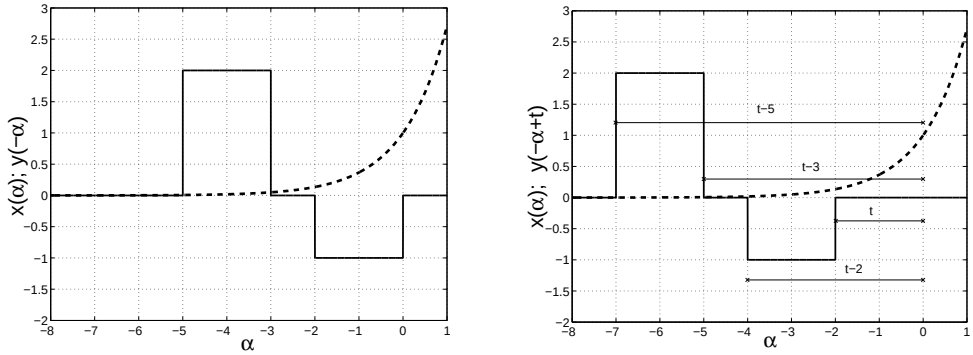
$$z(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)y(t-\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} y(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha$$

In pratica, il calcolo del prodotto di convoluzione, per ogni istante di tempo t, consiste nel calcolare il valore dell'integrale del prodotto tra i segnali x e y, di cui un segnale è mantenuto fisso (ad esempio $x(\alpha)$), mentre l'altro segnale viene riflesso (ad esempio $y(-\alpha)$) e traslato del tempo t (ad esempio $y(-\alpha+t)$). Di seguito è riportato il calcolo del prodotto di convoluzione secondo le due modalità possibili.

Nel primo caso si faccia riferimento ai segnali riportati in figura 3.5. Il segnale $z(t)$ si

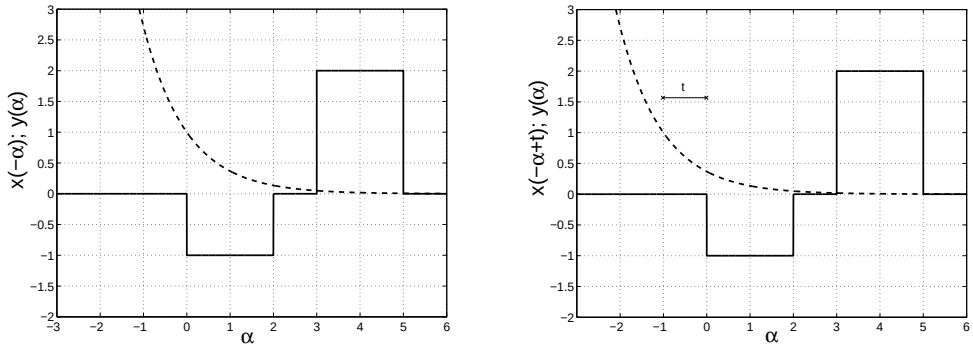
ottiene come:

$$
\begin{aligned}
z(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) y(t-\alpha) d\alpha = \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha} \left[2 \text{ rect} \left(\frac{(t-\alpha)-4}{2} \right) - \text{rect} \left(\frac{(t-\alpha)-1}{2} \right) \right] d\alpha \\
= & 2 \int_{t-5}^{t-3} e^{\alpha} d\alpha - \int_{t-2}^{t} e^{\alpha} d\alpha = 2e^{\alpha}|_{t-5}^{t-3} - e^{\alpha}|_{t-2}^{t} = \\
= & 2e^{t-3} - 2e^{t-5} - e^{t} + e^{t-2} = e^{t}[2e^{-3} - 2e^{-5} - 1 + e^{-2}]
\end{aligned}
$$



(a) (b)

Figura 3.5: (a) Segnali $x(\alpha)$ (linea tratteggiata) e $y(-\alpha)$ (linea continua) e (b) segnali $x(\alpha)$ (linea tratteggiata) e $y(-\alpha+t)$ con $t<0$ (linea continua)



(a) (b)

Figura 3.6: (a) Segnali $x(-\alpha)$ (linea tratteggiata) e $y(\alpha)$ (linea continua) e (b) segnali $x(-\alpha+t)$ con $t<0$ (linea tratteggiata) e $y(\alpha)$ (linea continua)

Nel secondo caso invece si hanno i segnali riportati in figura 3.6 e il segnale $z(t)$ risulta

da:

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-\alpha}\left[2\ \mathrm{rect}\left(\frac{\alpha-4}{2}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\right]d\alpha \\
&= 2\int_{3}^{5} e^{t-\alpha}d\alpha - \int_{0}^{2} e^{t-\alpha}d\alpha = -2e^{t-\alpha}\Big|_{3}^{5} + e^{t-\alpha}\Big|_{0}^{2} = \\
&= -2e^{t-5} + 2e^{t-3} + e^{t-2} - e^{t} = e^{t}[2e^{-3} - 2e^{-5} - 1 + e^{-2}]
\end{aligned}
$$

Il segnale $z(t)$ risultato del prodotto di convoluzione è un segnale che ha durata da $-\infty$ a ∞: questo si poteva sapere fin dall'inizio, ricordando che in generale vale la proprietà:

$$x(t) \neq 0 \forall t \in [t_1, t_2] \ \text{ e } \ y(t) \neq 0 \forall t \in [t_3, t_4] \Longrightarrow z(t) \neq 0 \forall t \in [t_1 + t_3, t_2 + t_4]$$

Esercizio 5

Dato il segnale $x(t)$ riportato in figura 3.7 , calcolare:

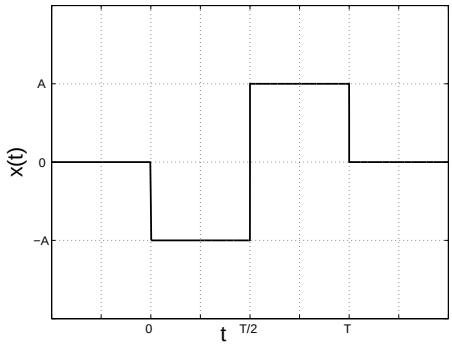


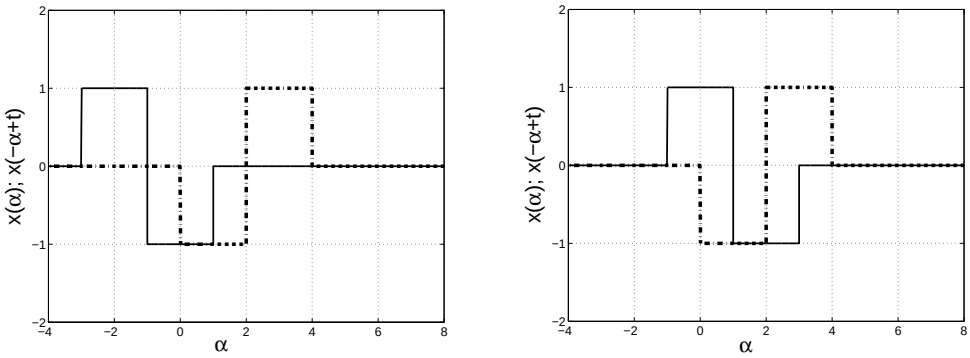
Figura 3.7: Segnale $x(t)$ caratterizzato da ampiezza $\pm A$ e durata T

- il prodotto di convoluzione $z(t) = x(t) \otimes x(t)$;
- l'autocorrelazione $r(t) = x(t) \otimes x^*(-t)$;
- l'autoconvoluzione e l'autocorrelazione dei segnali $x(-t)$ e $x(t-t_0)$, cioè:

$$
\begin{aligned}
z_1(t) &= x(-t) \otimes x(-t) \\
z_2(t) &= x(t-t_0) \otimes x(t-t_0) \\
r_1(t) &= x(-t) \otimes x^*(t) \\
r_2(t) &= x(t-t_0) \otimes x^*(-t-t_0)
\end{aligned}
$$

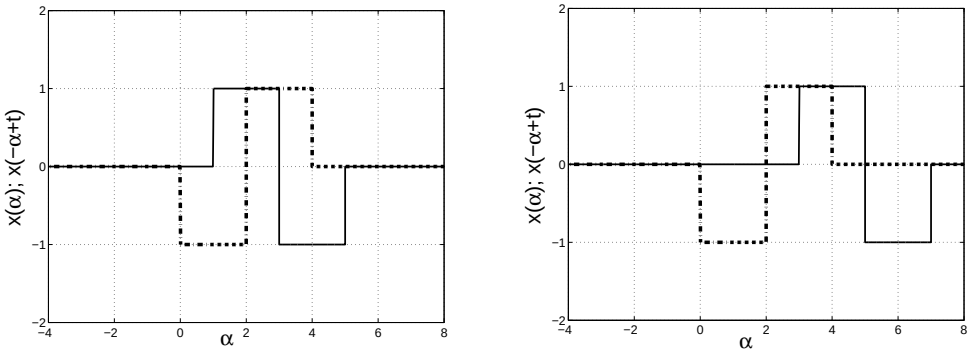
Soluzione 5

- Si può notare subito che il prodotto di convoluzione $z(t)$ assumerà valori diversi da zero solo nell'intervallo $[0, 2T]$. Si consideri il segnale dato, $x(\alpha)$, e il segnale riflesso e traslato di t, $x(-\alpha + t)$. Al variare di t si individuano quattro possibili situazioni in base alla sovrapposizione dei due segnali $x(\alpha)$ e $x(-\alpha + t)$: le quattro situazioni sono rappresentate nelle figure 3.8 e 3.9, dove si è posto $A = 1$ e $T = 4$. Si procede quindi al calcolo del prodotto di convoluzione:



(a) (b)

Figura 3.8: Segnali $x(\alpha)$ e $x(-\alpha + t)$ per diversi valori di t



(a) (b)

Figura 3.9: Segnali $x(\alpha)$ e $x(-\alpha + t)$ per diversi valori di t

$$0 < t < \frac{T}{2} \qquad z(t) = \int_0^t A^2 dt = A^2 t$$

$$\frac{T}{2} < t < T \qquad z(t) = \int_0^{t-T/2} -A^2 dt + \int_{t-T/2}^{T/2} A^2 dt + \int_{T/2}^{t} -A^2 dt =$$

$$= A^2 \left(-t + \frac{T}{2} + \frac{T}{2} - t + \frac{T}{2} - t + \frac{T}{2} \right) = -3A^2 t + 2A^2 T$$

$$T < t < \frac{3}{2}T \qquad z(t) = \int_{t-T}^{T/2} -A^2 dt + \int_{T/2}^{t-T/2} A^2 dt + \int_{t-T/2}^{T} -A^2 dt =$$

$$= A^2 \left(-\frac{T}{2} + t - T + t - \frac{T}{2} - \frac{T}{2} - T + t - \frac{T}{2} \right) = 3A^2 t - 4A^2 T$$

$$\frac{3}{2}T < t < 2T \qquad z(t) = \int_{t-T}^{T} A^2 dt = A^2 (T - t + T) = -A^2 t + 2A^2 T$$

L'andamento del segnale $z(t)$ è riportato in figura 3.10.

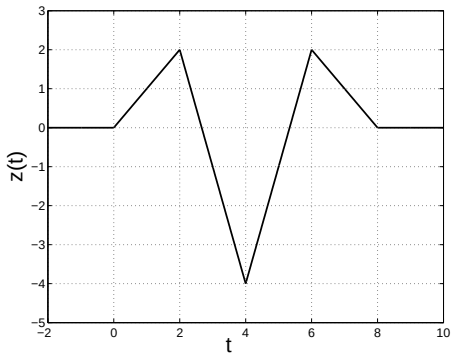


Figura 3.10: Convoluzione $z(t) = x(t) \otimes x(t)$ con $A = 1$ e $T = 4$

Lo stesso risultato si ottiene anche operando nel dominio della frequenza. Dalle proprietà della Trasformata di Fourier è noto che:

$$s_1(t) \otimes s_2(t) \rightleftharpoons S_1(f) \cdot S_2(f)$$

che nel caso specifico significa:

$$z(t) = x(t) \otimes x(t) \rightleftharpoons Z(f) = X(f) \cdot X(f) = X^2(f)$$

Scrivendo l'espressione analitica del segnale $x(t)$ e calcolando la relativa trasformata

$X(f)$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\operatorname{rect}\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right) + \operatorname{rect}\left(\frac{t-3T/4}{T/2}\right) \\
X(f) &= -\frac{T}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{T}{2}f\right)e^{-j2\pi\frac{T}{4}f} + \frac{T}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{T}{2}f\right)e^{-j2\pi\frac{3T}{4}f} = \\
&= \frac{T}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{T}{2}f\right)\left[-e^{-j2\pi\frac{T}{4}f} + e^{-j2\pi\frac{3T}{4}f}\right]
\end{aligned}$$

La convoluzione nel dominio della frequenza risulta quindi:

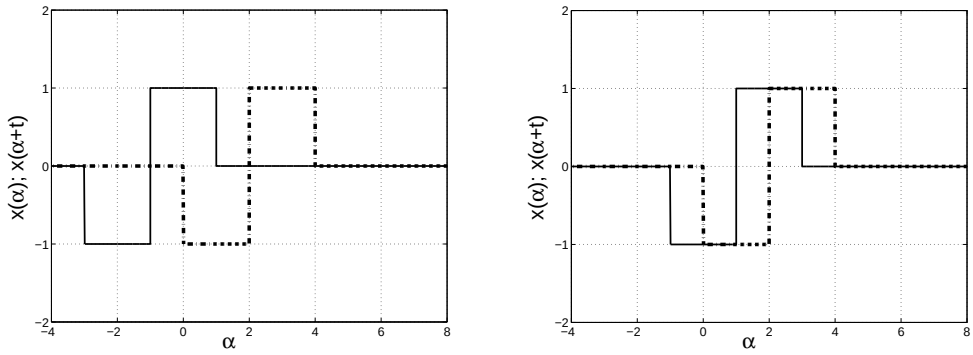
$$Z(f) = \left(\frac{T}{2}\right)^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{T}{2}f\right)\left[e^{-j2\pi\frac{T}{2}f} + e^{-j2\pi\frac{3T}{2}f} - 2e^{-j2\pi Tf}\right]$$

Tornando nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned}
z(t) &= \frac{T}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{t}{T/2}\right) \otimes [\delta(t-T/2) + \delta(t-3T/2) - 2\delta(t-T)] = \\
&= \frac{T}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{t-T/2}{T/2}\right) + \frac{T}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{t-3T/2}{T/2}\right) - T\operatorname{tr}\left(\frac{t-T}{T/2}\right)
\end{aligned}$$

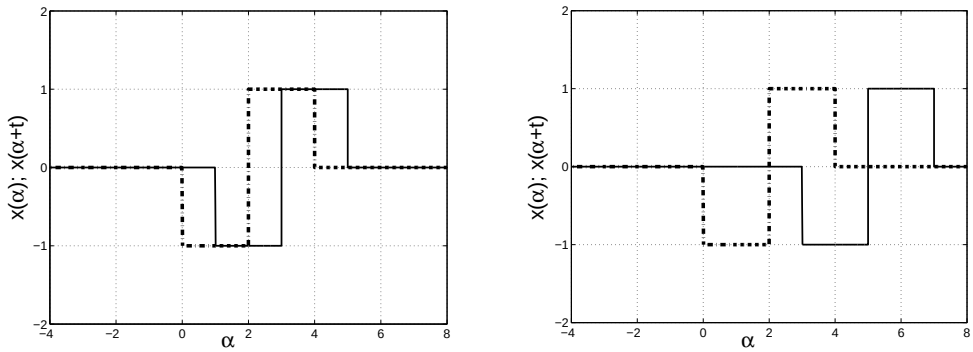
e disegnando l'espressione ottenuta si ottiene proprio l'andamento in figura 3.10.

- Per il calcolo dell'autocorrelazione $r(t) = x(t) \otimes x^*(-t)$, si può pensare di procedere in modo del tutto analogo a quanto fatto per il calcolo della convoluzione, considerando la convoluzione tra i segnali $x(t)$ e $x(-t)$ (essendo il segnale $x(t)$ reale). In questo caso il segnale $r(t)$ risulterà diverso da zero solo nell'intervallo $[-T, T]$, ed anche in questo caso si individuano quattro situazioni, riportate in figura 3.11 e 3.12. L'autocorrelazione risulta quindi:



(a) (b)

Figura 3.11: Segnali $x(\alpha)$ e $x(\alpha + t)$ per diversi valori di t



(a) (b)

Figura 3.12: Segnali $x(\alpha)$ e $x(\alpha + t)$ per diversi valori di t

$$
\begin{aligned}
-T < t < -\frac{T}{2} \quad & r(t) = \int_0^{T+t} -A^2 dt = -A^2 t - A^2 T \\
-\frac{T}{2} < t < 0 \quad & r(t) = \int_0^{T/2+t} A^2 dt + \int_{T/2+t}^{T/2} -A^2 dt + \int_{T/2}^{T+t} A^2 dt = \\
& = 3A^2 t + A^2 T \\
0 < t < \frac{T}{2} \quad & r(t) = \int_t^{T/2} A^2 dt + \int_{T/2}^{T/2+t} -A^2 dt + \int_{T/2+t}^{T} A^2 dt = \\
& = -3A^2 t + A^2 T \\
\frac{T}{2} < t < T \quad & r(t) = \int_t^{T} -A^2 dt = A^2 t - A^2 T
\end{aligned}
$$

L'andamento di $r(t)$ è rappresentato in figura 3.13.

Anche in questo caso lo stesso risultato si può ottenere passando nel dominio della frequenza, infatti:

$$r(t) = x(t) \otimes x(-t) \rightleftharpoons R(f) = X(f) \cdot X(-f)$$

Riprendendo il risultato ottenuto prima per $X(f)$ si ha:

$$
\begin{aligned}
R(f) =& \frac{T}{2}\text{sinc}\left(\frac{T}{2}f\right)\left[-e^{-j2\pi\frac{T}{4}f} + e^{-j2\pi\frac{3T}{4}f}\right] \cdot \frac{T}{2}\text{sinc}\left(\frac{T}{2}f\right)\left[-e^{j2\pi\frac{T}{4}f} + e^{j2\pi\frac{3T}{4}f}\right] \\
=& \left(\frac{T}{2}\right)^2 \text{sinc}^2\left(\frac{T}{2}f\right)\left[2 - e^{j2\pi\frac{T}{2}f} - e^{-j2\pi\frac{T}{2}f}\right]
\end{aligned}
$$

Tornando nel dominio del tempo, si ottiene quindi:

$$r(t) = T\text{tr}\left(\frac{t}{T/2}\right) - \frac{T}{2}\text{tr}\left(\frac{t+T/2}{T/2}\right) - \frac{T}{2}\text{tr}\left(\frac{t-T/2}{T/2}\right)$$

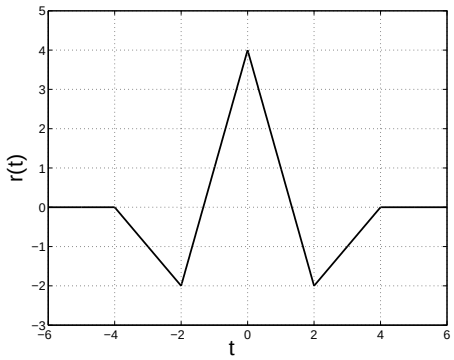


Figura 3.13: Autocorrelazione $r(t) = x(t) \otimes x^*(-t)$ con $A = 1$ e $T = 4$

e disegnando l'espressione ottenuta si ottiene proprio l'andamento in figura 3.13.

- Si consideri ora di voler determinare l'autoconvoluzione e l'autocorrelazione dei segnali $x(-t)$ e $x(t - t_0)$:

$$
\begin{aligned}
z_1(t) &= x(-t) \otimes x(-t) \\
z_2(t) &= x(t - t_0) \otimes x(t - t_0) \\
r_1(t) &= x(-t) \otimes x^*(t) \\
r_2(t) &= x(t - t_0) \otimes x^*(-t - t_0)
\end{aligned}
$$

Senza ripercorrere il procedimento fatto prima, si passa dal dominio della frequenza; ricordando che vale la proprietà:

$$a(t) \otimes b(t) \rightleftharpoons A(f)B(f)$$

con $A(f)$ e $B(f)$ che indicano rispettivamente le trasformate di Fourier dei segnali $a(t)$ e $b(t)$, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
z(t) = x(t) \otimes x(t) &\rightleftharpoons Z(f) = X(f)X(f) \\
r(t) = x(t) \otimes x^*(-t) &\rightleftharpoons R(f) = X(f)X^*(f)
\end{aligned}
$$

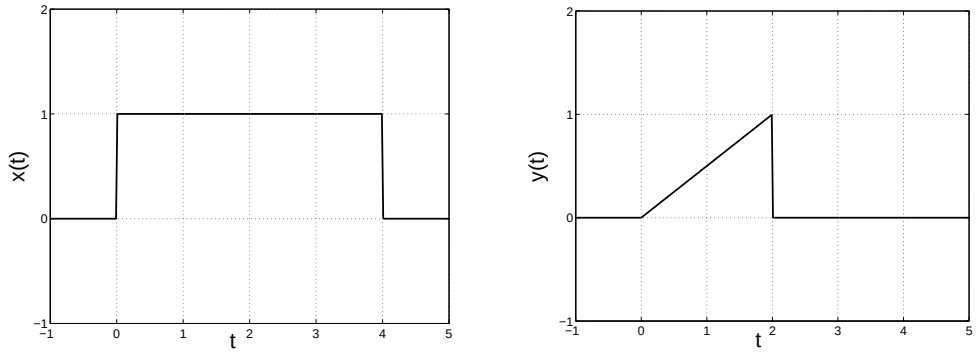
e quindi:

$$z_1(t) = x(-t) \otimes x(-t) \rightleftharpoons Z_1(f) = X(-f)X(-f) = Z(-f)$$
$$\Rightarrow z_1(t) = z(-t)$$
$$z_2(t) = x(t-t_0) \otimes x(t-t_0) \rightleftharpoons Z_2(f) = X(f)e^{-j2\pi t_0 f}X(f)e^{-j2\pi t_0 f} = Z(f)e^{-j2\pi 2t_0 f}$$
$$\Rightarrow z_2(t) = z(t-2t_0)$$
$$r_1(t) = x(-t) \otimes x^*(t) \rightleftharpoons R_1(f) = X(-f)X^*(-f) = R(-f)$$
$$\Rightarrow r_1(t) = r(-t) = r(t)$$
$$r_2(t) = x(t-t_0) \otimes x^*(-t-t_0) \rightleftharpoons R_2(f) = X(f)e^{-j2\pi t_0 f}X^*(f)e^{j2\pi t_0 f} = R(f)$$
$$\Rightarrow r_2(t) = r(t)$$

E' interessante notare come il segnale di autocorrelazione $r(t)$ sia indipendente dalle traslazioni.

Esercizio 6

Calcolare la convoluzione tra i segnali $x(t)$ e $y(t)$ riportati in figura 3.14(a) e (b) rispettivamente, e disegnarne l'andamento grafico.



(a) (b)

Figura 3.14: (a) Segnale $x(t)$ rettangolo e (b) segnale $y(t)$ triangolo

Soluzione 6

Il prodotto di convoluzione $z(t) = x(t) \otimes y(t)$ assume valori diversi da 0 per $t \in [0, 6]$. Si considera, per facilitare i calcoli, di mantenere fisso il segnale triangolo $y(\alpha)$ e di invertire e traslare il rettangolo ottenendo $x(-\alpha + t)$. Si individuano 3 situazioni: quando il rettangolo per piccole traslazioni comincia a sovrapporsi parzialmente al triangolo $t \in [0, 2]$;

quando il rettangolo è completamente sovrapposto al triangolo $t \in [2,4]$; quando il rettangolo per traslazioni maggiori perde la completa sovrapposizione col triangolo $t \in [4,6]$. Numericamente si ha:

$$0 < t < 2 \qquad z(t) = \int_0^t \frac{1}{2}\alpha d\alpha = \left.\frac{\alpha^2}{4}\right|_0^t = \frac{t^2}{4}$$

$$2 < t < 4 \qquad z(t) = \int_0^2 \frac{1}{2}\alpha d\alpha = \left.\frac{\alpha^2}{4}\right|_0^2 = 1$$

$$4 < t < 6 \qquad z(t) = \int_{t-4}^2 \frac{1}{2}\alpha d\alpha = \left.\frac{\alpha^2}{4}\right|_{t-4}^2 = -\frac{1}{4}t^2 + 2t - 3$$

L'andamento grafico è riportato in figura 3.15

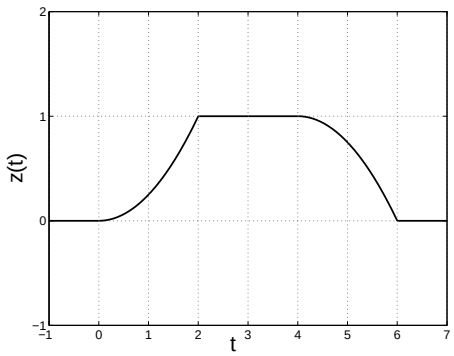


Figura 3.15: Prodotto di convoluzione $z(t)$ tra il rettangolo e il triangolo.

Esercizio 7

Calcolare l'energia dei seguenti segnali:

$$s_1(t) = 5\text{sinc}(2t)$$
$$s_2(t) = \text{sinc}(2t)\text{sinc}(3t)$$

Soluzione 7

Dalla definizione, l'energia di un segnale $s(t)$ risulta risulta:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$$

Per i due segnali quindi si ottiene:

$$E_{s_1} = \int_{-\infty}^{\infty} [5\text{sinc}(2t)]^2 dt = 25 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(2t) dt$$

$$E_{s_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(2t)\text{sinc}^2(3t) dt$$

Il calcolo dei due integrali non è affatto banale per cui si ricorre a delle soluzioni alternative. In particolare nel primo caso si può notare che per le proprietà della trasformata di Fourier vale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}|_{f=0}dt = \mathcal{F}\{g(t)\}|_{f=0} = G(f)|_{f=0}$$

Quindi per il segnale $s_1(t)$ si ottiene facilmente che:

$$E_{s_1} = 25 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(2t)dt = 25\mathcal{F}\{\text{sinc}^2(2t)\}|_{f=0} = 25\ \frac{1}{2}tr\left(\frac{f}{2}\right)\Big|_{f=0} = \frac{25}{2}$$

Nel caso del segnale $s_2(t)$, per applicare la stessa proprietà si dovrebbe calcolare la trasformata di Fourier del segnale $\text{sinc}^2(2t)\text{sinc}^2(3t)$, che corrisponde al calcolo del prodotto di convoluzione tra due triangoli. In alternativa si ricorre al teorema di Parseval, che afferma:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \|X(f)\|^2 df$$

e nella sua forma generalizzata risulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f)X_2^*(f)df$$

Tali relazioni derivano direttamente dalle proprietà della correlazione tra due segnali, ed in particolare il valore degli integrali è proprio la correlazione (o l'autocorrelazione) calcolata in zero.

Applicando Parseval generalizzato si ottiene quindi:

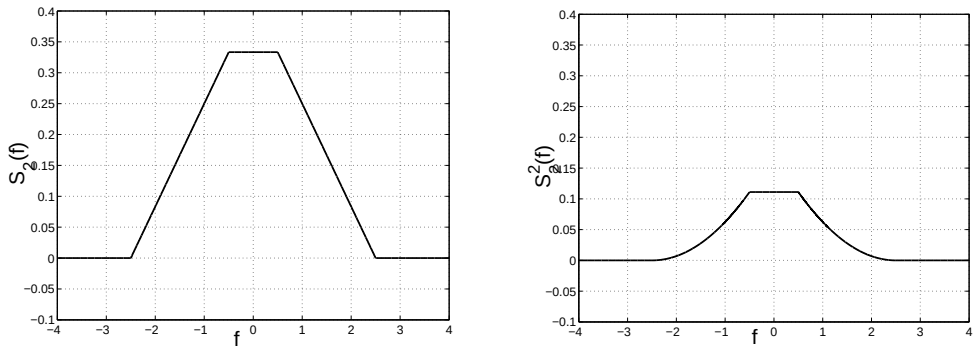
$$E_{s_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(2t)\text{sinc}^2(3t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\text{tr}\left(\frac{f}{2}\right)\frac{1}{3}\text{tr}\left(\frac{f}{3}\right)df =$$

$$= \frac{1}{6}2\int_{0}^{2}\left(-\frac{1}{2}f+1\right)\left(-\frac{1}{3}f+1\right)df = \frac{1}{3}\left(\frac{f^3}{18} - \frac{5f^2}{12} + f\right)\Big|_0^2 = \frac{7}{27}$$

Una soluzione alternativa per il calcolo dell'energia del segnale $s_2(t)$, può essere applicare il teorema di Parseval non generalizzato, cioè:

$$E_{s_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \|S_2(f)\|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2}\text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \otimes \frac{1}{3}\text{rect}\left(\frac{f}{3}\right) \right|^2 df$$

La convoluzione tra i due rect risulta essere un trapezio che va tra $[-5/2, 5/2]$, e assume valore massimo pari a $1/3$ nell'intervallo $[-1/2, 1/2]$ (figura 3.16(a)). Per il calcolo dell'energia basta quindi calcolare l'area del trapezio al quadrato (figura 3.16(b)), che risulta essere appunto pari a $7/27$.



(a) (b)

Figura 3.16: (a) $S_2(f)$ risultato della convoluzione tra $\frac{1}{2}\text{rect}\left(\frac{f}{2}\right)$ e $\frac{1}{3}\text{rect}\left(\frac{f}{3}\right)$ e (b) $S_2^2(f)$

Esercizio 8

Calcolare il risultato del seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(3t)\text{sinc}(7t)\text{sinc}^2(2t)dt$$

Soluzione 8

Per calcolare il risultato dell'integrale, si utilizza il teorema di Parseval generalizzato:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\text{sinc}(3t)\text{sinc}(7t)] \cdot \text{sinc}^2(2t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\text{sinc}(3t)\text{sinc}(7t)\} \cdot \mathcal{F}\{\text{sinc}^2(2t)\}df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{3}\text{rect}\left(\frac{f}{3}\right) \otimes \frac{1}{7}\text{rect}\left(\frac{f}{7}\right)\right] \cdot \frac{1}{2}\text{tr}\left(\frac{f}{2}\right) df$$

Tale integrale si risolve facilmente calcolando l'area del prodotto tra il trapezio (risultato della convoluzione) e il triangolo. La convoluzione tra i due rettangoli da luogo ad un trapezio esteso tra $[-5, 5]$ e di valore massimo pari a $1/7$ nell'intervallo $[-2, 2]$. Il triangolo è esteso tra $[-2, 2]$ con ampiezza $1/2$. Il prodotto tra il trapezio e il triangolo è quindi il triangolo stesso con ampiezza pari a $1/14$. Infine, il risultato dell'integrale non è altro che l'area di tale triangolo, cioè $4 \cdot \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{7}$.

Esercizio 9

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale $s(t) = |\sin(t)|$.

Soluzione 9

Per calcolare la trasformata di Fourier di un segnale periodico si ricorre alla formula di Poisson. Si consideri il segnale periodico $x_p(t) = \sum_n x_T(t - nT)$, con periodo T, visto come la ripetizione del corrispondente segnale troncato $x_T(t)$ di durata T. Indicando la trasformata di Fourier del segnale troncato come $X_T(f) = \mathcal{F}\{x_T(t)\}$, si ha:

$$\mathcal{F}\{x_p(t)\} = \frac{1}{T} \sum_k X_T\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

dove $X_T\left(\frac{k}{T}\right)$ indica la trasformata $X_T(f)$ calcolata nei punti $f_k = \frac{k}{T}$.

Nel caso dell'esercizio proposto si ha:

$$\begin{aligned} s(t) &= x_p(t) = |\sin(t)| \\ x_T(t) &= \sin(t)\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{\pi}{2}}{\pi}\right) \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} X_T(f) =& \frac{\delta(f - \frac{1}{2\pi}) - \delta(f + \frac{1}{2\pi})}{2j} \otimes \pi\mathrm{sinc}(\pi f) e^{-j2\pi\frac{\pi}{2}f} = \\ =& \frac{\pi}{2j}\left[\mathrm{sinc}\left(\pi\left(f - \frac{1}{2\pi}\right)\right) e^{-j2\pi\frac{\pi}{2}(f - \frac{1}{2\pi})} - \mathrm{sinc}\left(\pi\left(f + \frac{1}{2\pi}\right)\right) e^{-j2\pi\frac{\pi}{2}(f + \frac{1}{2\pi})}\right] = \\ =& \frac{\pi}{2}\left[\mathrm{sinc}\left(\pi\left(f - \frac{1}{2\pi}\right)\right) + \mathrm{sinc}\left(\pi\left(f + \frac{1}{2\pi}\right)\right)\right] e^{-j\pi^2 f} \end{aligned}$$

e infine:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{s(t)\} =& \frac{1}{\pi}\sum_k \frac{\pi}{2}\left[\mathrm{sinc}\left(\pi\left(\frac{k}{\pi} - \frac{1}{2\pi}\right)\right) + \mathrm{sinc}\left(\pi\left(\frac{k}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\right)\right)\right] e^{-j\pi^2\frac{k}{\pi}} \cdot \delta\left(f - \frac{k}{\pi}\right) \\ =& \frac{1}{2}\sum_k \left[\mathrm{sinc}\left(k - \frac{1}{2}\right) + \mathrm{sinc}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right] (-1)^k \cdot \delta\left(f - \frac{k}{\pi}\right) \end{aligned}$$

ricordando che $e^{-j\pi} = -1$.

Esercizio 10

Calcolare la trasformata di Fourier dell'onda triangolare periodica riportata in figura 3.17 e disegnarne l'andamento grafico.

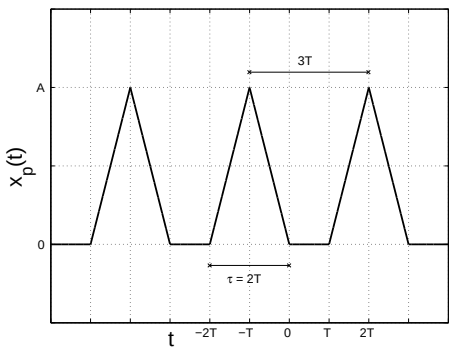


Figura 3.17: Onda triangolare periodica con periodo $3T$, durata $2T$ e ampiezza A

Soluzione 10

Applicando la formula di Poisson si ottiene:

$$
\begin{aligned}
x_T(t) &= A\mathrm{tr}\left(\frac{t+T}{T}\right) \\
X_T(f) &= AT\mathrm{sinc}^2(fT)e^{j2\pi fT} \\
x_p(t) &= \sum_n x_T(t-n3T) = \sum_n A\mathrm{tr}\left(\frac{t+T-n3T}{T}\right) \\
\mathcal{F}\{x_p(t)\} = X_p(f) &= \frac{1}{3T}\sum_k AT\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{3T}T\right)e^{j2\pi\frac{k}{3T}T}\cdot\delta\left(f-\frac{k}{3T}\right)
\end{aligned}
$$

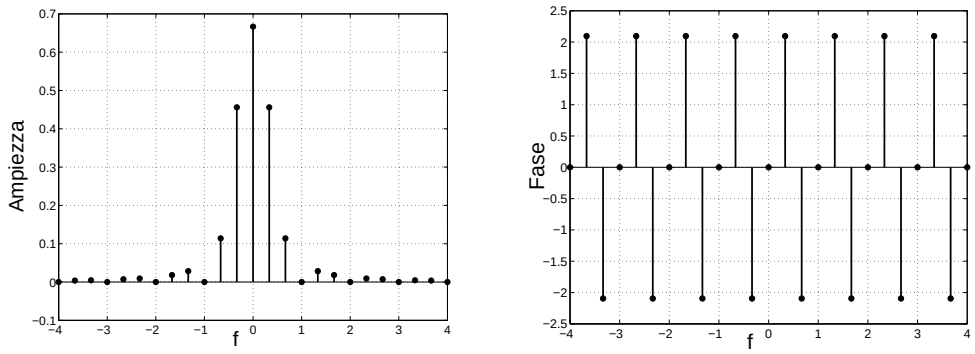
Per disegnare l'andamento grafico della trasformata $X_p(f)$, si esprime la stessa in forma di ampiezza e fase:

$$
\begin{aligned}
\|X_p(f)\| &= \frac{A}{3}\sum_k \mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{3}\right)\cdot\delta\left(f-\frac{k}{3T}\right) \\
\angle X_p(f) &= \sum_k \left[k\frac{2}{3}\pi\right]\cdot\delta\left(f-\frac{k}{3T}\right)
\end{aligned}
$$

i cui andamenti sono riportati in figura 3.18, per $A = 2$ e $T = 1$.

Nota: Un segnale periodico si può rappresentare mediante la serie di Fourier:

$$x_p(t) = \sum_n c_n e^{j2\pi\frac{n}{T}t}$$



(a) (b)

Figura 3.18: (a) Spettro di ampiezza e (b) spettro di fase dell'onda triangolare periodica per $A = 2$ e $T = 1$

Si ricorda che i termini c_n della serie di Fourier sono in relazione con la trasformata di Fourier del segnale troncato $x_T(t)$:

$$c_n = \frac{1}{T} X_T \left(\frac{n}{T} \right)$$

A tal proposito si confronti l'andamento degli spettri di ampiezza e fase di $\|X_p(f)\|$ in figura 3.18, con l'andamento degli spettri di ampiezza e fase dei coefficienti della serie di Fourier dell'onda triangolare dell'esercizio 2 del capitolo 2 (figura 2.6): per quanto riguarda lo spettro di ampiezza, i due andamenti sono uguali, mentre per quanto riguarda la fase, nel caso di onda triangolare centrata nell'origine si ha una fase identicamente nulla (figura 2.6(b)), mentre nel caso di onda triangolare traslata si ha una fase dipendente dalla traslazione (figura 3.18(b)).

Altri esercizi

1. Calcolare gli spettri di fase e di ampiezza del segnale $s(t) = Ae^{-bt}\mathrm{u}(t)e^{j200\pi t}$, con A e b costanti arbitrarie maggiori di zero.

2. Calcolare la Trasformata di Fourier dei seguenti segnali:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= 10\mathrm{sinc}^2(t)\cos(300\pi t + \pi/6) \\ s_2(t) &= e^{-3t}\mathrm{u}(t-1)\cos(2\pi f_0 t) \\ s_3(t) &= \mathrm{tr}\left(\frac{1-t}{2}\right) e^{-j200\pi t} \end{aligned}$$

3. Calcolare i seguenti prodotti di convoluzione:

$$
\begin{aligned}
z_1(t) &= \cos(2\pi f_0 t) \otimes \mathrm{rect}(2 f_0 t) \\
z_2(t) &= e^{t}\mathrm{u}(-t) \otimes e^{t-3}\mathrm{u}(-t+3) \\
z_3(t) &= 2\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{2}\right) \otimes 3\mathrm{rect}\left(\frac{t+3}{4}\right)
\end{aligned}
$$

   e disegnarne gli andamenti grafici.

4. Calcolare il valore dei seguenti integrali:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{+j8\pi t}\mathrm{sinc}^2(2t+1)dt
$$

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(t-1)\cos(\pi t)dt
$$

5. Calcolare l'energia del segnale $s(t) = \mathrm{sinc}(6t)\cos(2\pi f_0 t)$, con $f_0 \gg 3$.

6. Calcolare la Trasformata di Fourier del segnale periodico riportato in figura 3.19 e disegnarne l'andamento grafico.

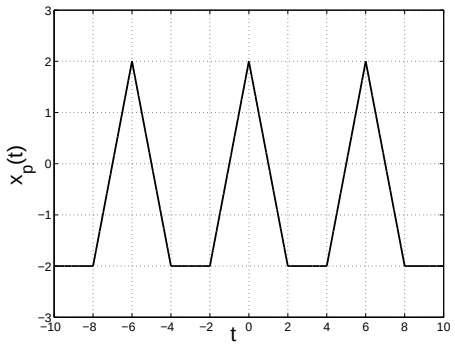


Figura 3.19: Segnale periodico

Capitolo 4

Sistemi Lineari Tempo Invarianti

Problemi affrontati nel presente capitolo:

- determinare le caratteristiche di sistemi: linearità, tempo invarianza, causalità, stabilità;
- determinare la risposta impulsiva e la risposta in frequenza di sistemi lineari tempo invarianti ($SLTI$);
- calcolo della trasformata di Hilbert;
- componenti in fase e in quadratura.

Esercizio 1

Determinare se i seguenti sistemi sono lineari, tempo invarianti, causali, stabili:

$$y_1(t) = 2x(t)\cos(t)$$
$$y_2(t) = x(t)e^{x(t)}$$

Soluzione 1

Un sistema è lineare se vale il principio di sovrapposizione degli effetti: indicando con $\mathcal{T}[\cdot]$ la trasformazione operata dal sistema sull'ingresso $x(t)$ che produce l'uscita $y(t)$: $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$, deve valere:

$$\mathcal{T}[ax_a(t) + bx_b(t)] = a\mathcal{T}[x_a(t)] + b\mathcal{T}[x_b(t)] = ay_a(t) + by_b(t) \quad \forall x_a, x_b, a, b$$

cioè, in altre parole, la trasformazione applicata ad una combinazione lineare di più ingressi, deve produrre una combinazione lineare delle rispettive uscite. Per i due sistemi di

questo esercizio si verifica facilmente quindi:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1[ax_a(t)+bx_b(t)] =& 2[ax_a(t)+bx_b(t)]\cos(t) = 2ax_a(t)\cos(t)+bx_b(t)\cos(t) = \\ =& ay_a(t)+by_b(t) \\ \mathcal{T}_2[ax_a(t)+bx_b(t)] =& [ax_a(t)+bx_b(t)]e^{[ax_a(t)+bx_b(t)]} = ax_a(t)e^{[ax_a(t)+bx_b(t)]}+ \\ &+bx_b(t)e^{[ax_a(t)+bx_b(t)]} \neq ay_a(t)+by_b(t) = ax_a(t)e^{x_a(t)}+bx_b(t)e^{x_b(t)}\end{aligned}$$

cioè il primo sistema risulta lineare, mentre il secondo no.

Per quanto riguarda la tempo invarianza deve valere:

$$\mathcal{T}[x(t-t_0)] = y(t-t_0) \quad \forall x, t_0$$

cioè la trasformazione applicata ad un ingresso ritardato (o anticipato) di un tempo t_0, deve produrre un'uscita pari all'uscita stessa ritardata (o anticipato) di t_0. Considerando i due sistemi si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1[x(t-t_0)] =& 2x(t-t_0)\cos(t) \neq y_1(t-t_0) = 2x(t-t_0)\cos(t-t_0) \\ \mathcal{T}_2[x(t-t_0)] =& x(t-t_0)e^{x(t-t_0)} = y_2(t-t_0)\end{aligned}$$

quindi, il primo sistema non risulta tempo invariante, mentre il secondo si.

Dalla definizione di causalità si ha che un sistema è causale se:

$$y(t_0) = \mathcal{T}[x(t)]|_{t_0} = \mathcal{T}[x(t)u(t_0-t)] \quad \forall x, t_0$$

cioè l'uscita al tempo t_0 dipende dall'ingresso considerato solo per istanti non successivi al tempo t_0. Entrambi i sistemi considerati sono causali:

$$\begin{aligned}y_1(t_0) &= 2x(t_0)\cos(t_0) \\ y_2(t_0) &= x(t_0)e^{x(t_0)}\end{aligned}$$

poiché l'uscita al tempo t_0 dipende solo dall'ingresso al tempo t_0.

Infine dalla definizione di stabilità e in particolare di stabilità Bounded Input Bounded Output ($BIBO$) si ha che un sistema è $BIBO$ stabile se:

$$\exists M : |x(t)| < M \quad \Rightarrow \quad \exists N : |y(t)| < N \quad \forall t$$

cioè ad un ingresso limitato corrisponde un'uscita limitata. Anche in questo caso si verifica che i due sistemi sono stabili, infatti:

$$\begin{aligned}|x(t)| < M \quad &\Rightarrow \quad |y_1(t)| = 2|x(t_0)||\cos(t_0)| < 2M|\cos(t_0)| < 2M = N \\ |x(t)| < M \quad &\Rightarrow \quad |y_2(t)| = |x(t)||e^{x(t)}| < Me^M = N\end{aligned}$$

Esercizio 2

Dato il sistema:

$$y(t) = \int_{t-3}^{t+3} x(\tau)d\tau + x(t-5)$$

- verificare che il sistema è lineare e tempo invariante;
- calcolarne la risposta impulsiva;
- calcolare e rappresentare graficamente le risposte al sistema quando al suo ingresso viene posto $x_1(t) = rect(t/4)$ e $x_2(t) = \cos(\pi t)$.

Soluzione 2

Si ricorda anzitutto che un sistema risulta LTI se e solo se:

$$\mathcal{T}[x(t)] = x(t) \otimes h(t) = y(t)$$

dove $h(t) = \mathcal{T}[\delta(t)]$ è definita risposta impulsiva del sistema. Applicando le proprietà della trasformata di Fourier segue che un sistema è LTI se e solo se:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

dove $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ è definita risposta in frequenza del sistema, e $Y(f)$ e $X(f)$ sono rispettivamente le trasformate di Fourier dei segnali in uscita e in ingresso al sistema.

- Si comincia a verificare la linearità e la tempo invarianza del sistema: esso può essere analizzato come somma di due sotto sistemi, un integrale e una linea di ritardo:

$$y_1(t) = \int_{t-3}^{t+3} x(\tau)d\tau$$
$$y_2(t) = x(t-5)$$
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

  Per quanto riguarda l'integrale si verifica facilmente che è un sistema LTI, infatti:

$$\mathcal{T}_1\{ax_a(t) + bx_b(t)\} = a\int_{t-3}^{t+3} x_a(\tau)d\tau + b\int_{t-3}^{t+3} x_b(\tau)d\tau = ay_{1a}(t) + by_{1b}(t)$$
$$\mathcal{T}_1\{x(t-t_0)\} = \int_{t-3}^{t+3} x(\tau - t_0)d\tau = \int_{t-3-t_0}^{t+3-t_0} x(\tau')d\tau' = y_1(t-t_0)$$

Analogamente si verifica la LTI per il secondo sotto sistema:

$$\mathcal{T}_2\{ax_a(t) + bx_b(t)\} = ax_a(t-5) + bx_b(t-5) = ay_{2a}(t) + by_{2b}(t)$$
$$\mathcal{T}_2\{x(t-t_0)\} = x(t-5-t_0) = x((t-t_0)-5) = y_2(t-t_0)$$

Si conclude quindi che $y(t)$ essendo somma di due sistemi LTI è anch'esso un $SLTI$.

Nota: il sistema è stabile ma non è causale. Si verifica facilmente che se l'ingresso $x(t)$ è limitato $\forall t$, anche l'uscita $y(t)$ risulta limitata: infatti, l'integrale su supporto finito di una funzione limitata è limitato, e la linea di ritardo non è altro che il segnale stesso ritardato (e quindi ancora limitato). D'altra parte l'uscita al tempo $\bar{t}$, dipenderà, per il sotto sistema integrale, anche dall'ingresso nell'intervallo $[\bar{t}, \bar{t}+3]$, che implica la non causalità del sistema.

- Per calcolare la risposta impulsiva del sistema LTI:

$$h(t) = \mathcal{T}[\delta(t)] = \int_{t-3}^{t+3} \delta(\tau)d\tau + \delta(t-5) = \int_{-\infty}^{t+3} \delta(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{t-3} \delta(\tau)d\tau + \delta(t-5)$$
$$= u(t+3) - u(t-3) + \delta(t-5) = \text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) + \delta(t-5)$$

- La risposta al sistema si ottiene come:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

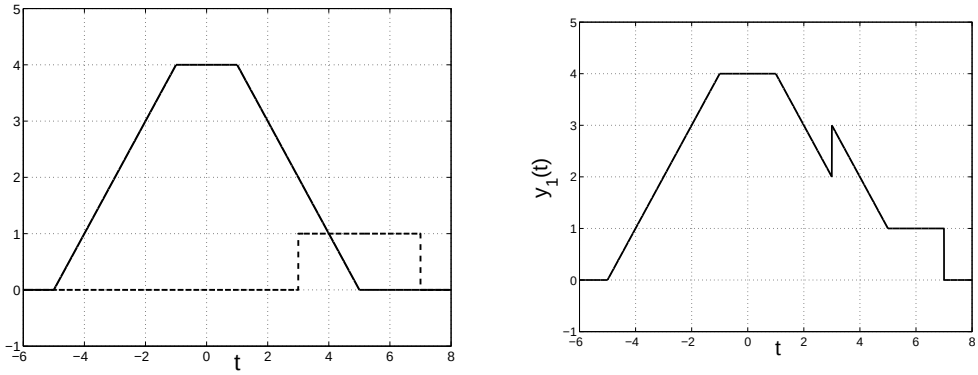
Nel primo caso si ha:

$$\begin{aligned} y_1(t) =& x_1(t) \otimes h(t) = rect\left(\frac{t}{4}\right) \otimes \left[\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) + \delta(t-5)\right] \\ =& rect\left(\frac{t}{4}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) + rect\left(\frac{t}{4}\right) \otimes \delta(t-5) = \\ =& rect\left(\frac{t}{4}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) + rect\left(\frac{t-5}{4}\right) \end{aligned}$$

Il prodotto di convoluzione ha come risultato il trapezio riportato in figura 4.1(a), mentre l'andamento grafico dell'uscita $y_1(t)$ è riportato in figura 4.1(b).

Nel secondo caso si ha:

$$\begin{aligned} y_2(t) =& x_2(t) \otimes h(t) = \cos(\pi t) \otimes \left[\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) + \delta(t-5)\right] \\ =& \cos(\pi t) \otimes \text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) + \cos(\pi t) \otimes \delta(t-5) = \\ =& \cos(\pi t) \otimes \text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) + \cos(\pi(t-5)) \end{aligned}$$



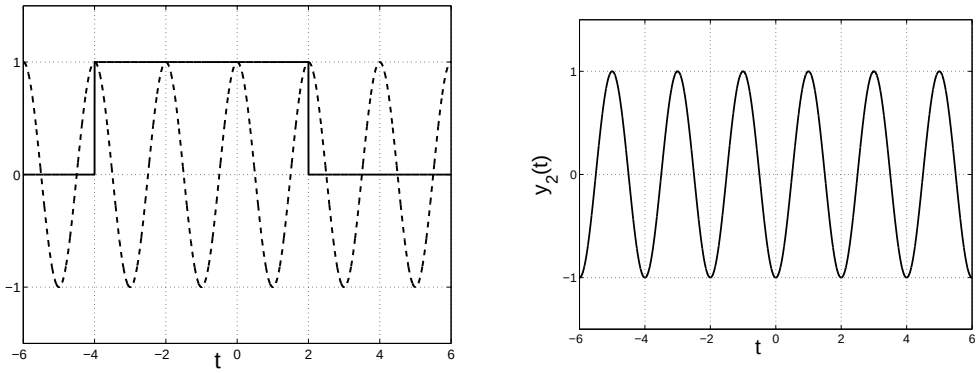
(a) (b)

Figura 4.1: (a) $rect\left(\frac{t}{4}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{t}{6}\right)$ (linea continua) e $rect\left(\frac{t-5}{4}\right)$ (linea tratteggiata) e (b) uscita $y_1(t)$.

Il prodotto di convoluzione produce un risultato nullo; infatti, si ottiene come l'integrale del prodotto tra un coseno di periodo $T = 2$ e un rect di durata 6 (figura 4.2(a)), e quindi come l'integrale di 3 periodi del coseno, che risulta appunto pari a zero. Si ha quindi:

$$y_2(t) = \cos(\pi(t-5)) = \cos(\pi t - 5\pi) = \cos(\pi t - \pi) = -\cos(\pi t)$$

il cui andamento grafico è riportato in figura 4.2(b).



(a) (b)

Figura 4.2: (a) $\cos(\pi t) \otimes \text{rect}\left(\frac{t}{6}\right)$ e (b) uscita $y_2(t)$.

Nota: nel secondo caso (ingresso al sistema $x_2(t) = cos(\pi t)$) si poteva subito dire che l'uscita al sistema era ancora un segnale di tipo coseno: infatti quando un segnale sinusoidale passa attraverso un $SLTI$ la risposta al sistema è ancora un segnale sinusoidale modificato da:

$$\mathcal{T}[Acos(2\pi f_0 t - \varphi)] = A\|H(f_0)\|cos(2\pi f_0 t - \varphi + \angle H(f_0))$$

Nel nostro caso l'ampiezza del coseno non viene modificata poiché la risposta in ampiezza del sistema vale 1, mentre il coseno subisce uno sfasamento di 5π.

Esercizio 3

Dato il sistema rappresentato in figura 4.3, se ne calcoli la risposta impulsiva e la risposta in frequenza. Determinare inoltre il segnale $y(t)$ in uscita al sistema, quando al suo ingresso viene posto il segnale $x(t) = 2\cos(2\pi f_0 t)$, con $f_0 = 1/(2T)$ e $f_0 = 1/T$.

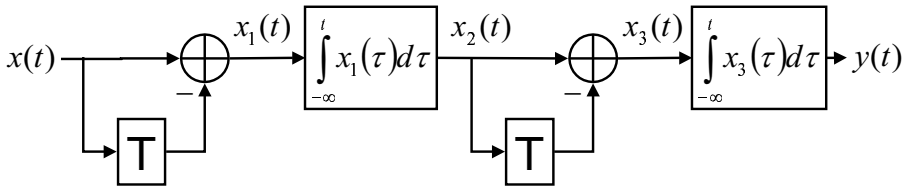


Figura 4.3: Sistema

Soluzione 3

Il sistema complessivo può essere analizzato come due sotto sistemi in serie (cascata); in generale per due sistemi in serie (cascata) vale:

$$h_{tot}(t) = h_1(t) \otimes h_2(t)$$
$$H_{tot}(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$$

mentre per due sistemi in parallelo vale:

$$h_{tot}(t) = h_1(t) + h_2(t)$$
$$H_{tot}(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

Nel caso dell'esercizio proposto i due sotto sistemi sono identici per cui si ottiene:

$$h_{tot}(t) = h_1(t) \otimes h_1(t)$$
$$H_{tot}(f) = H_1(f) \cdot H_1(f) = H_1^2(f)$$

Si deve quindi calcolare la risposta impulsiva e la risposta in frequenza del primo

blocco:

$$\begin{aligned}
x_1(t) =& x(t) - x(t-T) \\
x_2(t) =& \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{t} x(\tau - T)d\tau
\end{aligned}$$

In frequenza si ha:

$$\begin{aligned}
X_1(f) =& X(f) - X(f)e^{-j2\pi Tf}, \qquad X_1(0) = 0 \\
X_2(f) =& \frac{X_1(f)}{j2\pi f} = X(f)\frac{1 - e^{-j2\pi Tf}}{j2\pi f} \\
=& X(f)e^{-j2\pi\frac{T}{2}f}\frac{e^{j2\pi\frac{T}{2}f} - e^{-j2\pi\frac{T}{2}f}}{j2\pi f} = X(f)e^{-j2\pi\frac{T}{2}f}\sin(\pi Tf)\frac{T}{\pi Tf} \\
=& X(f)T\text{sinc}(Tf)e^{-j\pi Tf}
\end{aligned}$$

La risposta in frequenza della prima parte del sistema risulta quindi:

$$H_1(f) = \frac{X_2(f)}{X(f)} = T\text{sinc}(Tf)e^{-j\pi Tf}$$

e la risposta in frequenza del sistema totale è:

$$H(f) = T^2\text{sinc}^2(Tf)e^{-j2\pi Tf}$$

Per calcolare la risposta impulsiva basta antitrasformare $H(f)$:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = T\text{tr}\left(\frac{t-T}{T}\right)$$

Operando invece nel dominio del tempo si calcola $h_1(t)$ come l'uscita del primo sotto sistema, quando all'ingresso è posto il segnale $\delta(t)$, quindi:

$$\begin{aligned}
h_1(t) =& \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - T)d\tau \\
=& u(t) - u(t-T) = \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)
\end{aligned}$$

La risposta impulsiva del sistema risulta dal prodotto di convoluzione:

$$h(t) = h_1(t) \otimes h_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) = T\text{tr}\left(\frac{t-T}{T}\right)$$

Una volta determinata la risposta in frequenza del sistema, è immediato calcolare l'uscita del sistema quando al suo ingresso è posto il segnale sinusoidale $x(t) = 2cos(2\pi f_0 t)$. Infatti, si ha:

$$y(t) = \mathcal{T}[2cos(2\pi f_0 t)] = 2\|H(f_0)\|cos(2\pi f_0 t + \angle H(f_0))$$

dove $\|H(f_0)\|$ e $\angle H(f_0)$ rappresentano proprio l'ampiezza e la fase della risposta in frequenza del sistema, calcolate per $f = f_0$:

$$\|H(f_0)\| = T^2 \text{sinc}^2(Tf_0)$$
$$\angle H(f_0) = e^{-j2\pi T f_0}$$

Nel caso $f = f_0 = 1/(2T)$, si ottiene:

$$y(t) = 2T^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 cos(2\pi f_0 t - \pi)$$

mentre quando $f = f_0 = 1/T$, si ottiene un'uscita identicamente nulla, essendo nullo il valore di $\text{sinc}^2(1)$.

Esercizio 4

Calcolare la trasformata di Hilbert $\mathcal{H}$ dei seguenti segnali:

- $s_1(t) = \delta(t) + \cos(10\pi t)$
- $s_2(t) = \frac{3}{t}$
- $s_3(t) = \text{sinc}(t + 4)$
- $s_4(t) = \text{sinc}(t)\cos(200\pi t) + \text{sinc}^2(t)\sin(200\pi t)$

Soluzione 4

L'operatore Trasformata di Hilbert è un $SLTI$ con:

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}$$
$$H(f) = -j\text{sign}(f)$$

La caratteristica di questo sistema è quella di sfasare di $\frac{\pi}{2}$ il segnale in ingresso; questo si può verificare osservando che la trasformata di Hilbert di un coseno è un seno. Inoltre, dalla risposta in frequenza si ricava facilmente che $\|H(f)\| = |-\text{sign}(f)| = 1, \quad \forall f$ e che, essendo $\pm j = e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$, $\angle H(f) = \frac{\pi}{2},\ f < 0,\ \angle H(f) = 0,\ f = 0,\ \angle H(f) = -\frac{\pi}{2},\ f > 0$. Si calcola quindi $\mathcal{H}\{\cos(2\pi f_0 t)\}$:

$$\mathcal{H}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \cos(2\pi f_0 t) \otimes \frac{1}{\pi t}$$

che in frequenza diventa:

$$\frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \cdot [-j\text{sign}(f)] = \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j}$$

e quindi:

$$\mathcal{H}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \sin(2\pi f_0 t)$$

Si procede ora al calcolo della trasformata di Hilbert dei quattro segnali.

- Nel primo caso avendo già calcolato la trasformata di Hilbert del coseno si può procedere al calcolo nel dominio del tempo, infatti:

$$\hat{s}_1(t) = \mathcal{H}\{s_1(t)\} = \delta(t) \otimes \frac{1}{\pi t} + \cos(10\pi t) \otimes \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi t} + \sin(10\pi t)$$

- Nel secondo caso si noti che il segnale $s_2(t)$ si può anche scrivere come $s_2(t) = \frac{3\pi}{\pi t} = 3\pi\delta(t) \otimes \frac{1}{\pi t}$; la trasformata di Hilbert $\hat{s}_2(t)$ equivale quindi ad applicare due volte la stessa trasformazione al segnale $3\pi\delta(t)$. In generale vale:

$$\hat{\hat{s}}(t) = \left[s(t) \otimes \frac{1}{\pi t}\right] \otimes \frac{1}{\pi t}$$

che in frequenza equivale a:

$$S(f) \cdot [-j\text{sign}(f)] \cdot [-j\text{sign}(f)] = -S(f)$$

e quindi:

$$\hat{\hat{s}}(t) = -s(t)$$

Da ciò si ricava immediatamente che:

$$\hat{s}_2(t) = -3\pi\delta(t)$$

- Per il calcolo di $\hat{s}_3(t)$ si calcola prima la trasformata di Hilbert di $\text{sinc}(t)$; per fare ciò si passa nel dominio della frequenza:

$$\mathcal{F}\{\text{sinc}(t)\} = \text{rect}(f)$$

e si calcola la trasformata di Hilbert:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\{\text{rect}(f)\} =& -j\text{sign}(f)\text{rect}(f) = \\ =& j\left[rect\left(\frac{f+1/4}{1/2}\right) - rect\left(\frac{f-1/4}{1/2}\right)\right]\end{aligned}$$

infine si calcola l'antitrasformata di Fourier:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\{\text{sinc}(t)\} =& \mathcal{F}^{-1}\left\{j\left[rect\left(\frac{f+1/4}{1/2}\right) - rect\left(\frac{f-1/4}{1/2}\right)\right]\right\} = \\ =& j\left\{\frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)\left[e^{-j2\pi\frac{1}{4}t} - e^{j2\pi\frac{1}{4}t}\right]\right\} \\ =& \text{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\pi\frac{t}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(\pi\frac{t}{2}\right)}{\pi\frac{t}{2}} = \frac{1-\cos(\pi t)}{\pi t}\end{aligned}$$

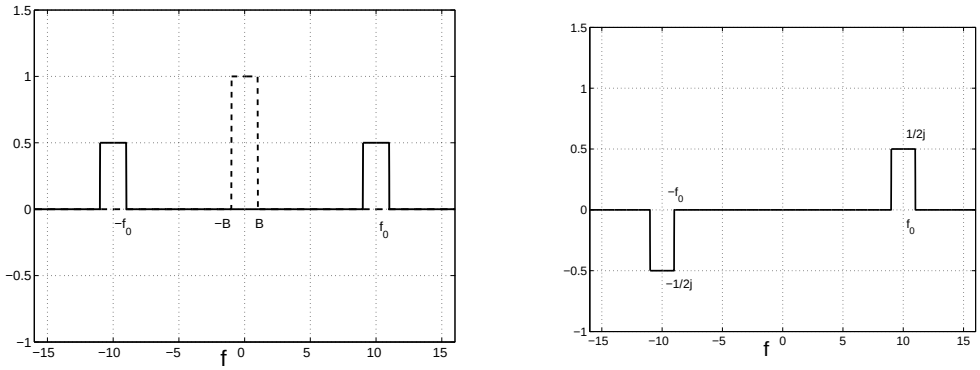
Considerando quindi che la trasformata di Hilbert è tempo invariante, $\hat{s}_3(t)$ si ottiene come $\mathcal{H}\{\text{sinc}(t)\}$ traslata in $t+4$:

$$\hat{s}_3(t) = \mathcal{H}\{\text{sinc}(t+4)\} = \frac{1-\cos(\pi(t+4))}{\pi(t+4)}$$

- Prima di procedere al calcolo di $\hat{s}_4(t)$ si noti che i due segnali $\text{sinc}(t)$ e $\text{sinc}^2(t)$ sono segnali di tipo passa basso con banda rispettivamente $[-1/2, 1/2]$ e $[-1, 1]$ che vengono moltiplicati per segnali di tipo passa banda (nello specifico per un coseno e un seno a frequenza $f_0 = 100$). Si consideri quindi il calcolo della trasformata di Hilbert di un generico segnale $y(t)$, prodotto di un segnale $x(t)$ passa basso di banda $B : X(f) \neq 0 \quad \forall \quad |f| < B$, per un segnale $m(t)$ passa banda di banda B_0 e centrato a frequenza $f_0 \gg B, f_0 \gg B_0$. Nello specifico si considera $m(t) = \cos(2\pi f_0 t)$:

$$\hat{y}(t) = \mathcal{H}\{x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)\}$$

Passando nel dominio della frequenza si ottiene uno spettro del tipo riportato in



(a) (b)

Figura 4.4: (a) $X(f)$ (linea tratteggiata) e $X(f) \otimes \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}$ (linea continua) e (b) $\mathcal{H}\left\{X(f) \otimes \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}\right\}$

figura 4.4(a):

$$\mathcal{F}\{x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)\} = X(f) \otimes \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}$$

Calcolando la trasformata di Hilbert si ha (figura 4.4(b)):

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\left\{X(f) \otimes \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}\right\} =& \frac{X(f-f_0)+X(f+f_0)}{2} \cdot [-j\text{sign }(f)] = \\ =& \frac{X(f-f_0)-X(f+f_0)}{2j} = \\ =& X(f) \otimes \frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}\end{aligned}$$

e antitrasformando si ottiene:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{X(f) \otimes \frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}\right\} = x(t)\cdot\sin(2\pi f_0 t)$$

Ovviamente le considerazioni fatte ora sono valide solo se la banda del segnale passa basso è tale che gli spettri traslati in $\pm f_0$ non si sovrappongono. In generale si può quindi affermare che applicare la trasformata di Hilbert ad un segnale passa basso di banda B moltiplicato per un segnale passa banda a frequenza $f_0 \gg B$, implica lasciare invariato il segnale passa basso, andando a trasformare solo il segnale passa banda:

$$\hat{y}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\cdot m(t)\} = x(t)\cdot\hat{m}(t)$$

Concludendo nel caso dell'esercizio proposto si ottiene:

$$\hat{s}_4(t) = \mathrm{sinc}(t)\sin(200\pi t) - \mathrm{sinc}^2(t)\cos(200\pi t)$$

Altri esercizi

1. Dato un segnale $x(t)$ si indichi con $y(t)$ la sua trasformata di Hilbert. Calcolare la trasformata di Hilbert del segnale $x(3t)$ in funzione di $y(t)$.

2. Il segnale $x(t) = \cos(20\pi t)$ viene posto all'ingresso di un sistema lineare tempo invariante avente risposta impulsiva $\mathrm{tr}\left(\frac{20(t-1)}{3}\right)$. Determinare l'uscita $y(t)$ del sistema e calcolarne la potenza media.

3. La relazione ingresso uscita di un sistema è descritta mediante la seguente relazione:

$$y(t) = \int_t^{+\infty} x(\tau - a)d\tau$$

dove $x(t)$ e $y(t)$ indicano, rispettivamente, il segnale in ingresso e in uscita al sistema. Studiare la linearità e la tempo invarianza del sistema, e, in caso affermativo, calcolarne la risposta impulsiva.

4. 4. Il segnale $x(t) = \sin(10\pi t)$ viene posto all'ingresso di un sistema lineare tempo invariante avente risposta impulsiva $\mathrm{sinc}^2[10(t-1)]$. Si determini l'uscita del sistema $y(t)$.

5. Studiare la linearità e la tempo invarianza dei seguenti sistemi:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= kx(t)u(t-2) \\
y(t) &= x(t)\delta(t-1) + k \\
y(t) &= x(t)/t \\
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{t+\tau}d\tau
\end{aligned}
$$

6. Il segnale $x(t) = \text{sinc}^2(3t)$ viene fatto passare per un filtro passa basso ideale avente banda $[-B, B]$. Detto $y(t)$ il segnale all'uscita del filtro, determinare il valore di B per il quale l'energia di $y(t)$ è pari alla metà dell'energia di $x(t)$.

7. Il segnale $x(t) = e^{-b|t-t_0|}$ viene posto in ingresso ad un S.L.T.I. ottenendo in uscita il segnale $y(t)$ il cui spettro risulta:

$$Y(f) = \frac{2be^{-j2\pi f t_0 - 2\pi^2\sigma^2 f^2}}{b^2 + 4\pi^2 f^2}$$

con b, σ e t_0 costanti positive. Calcolare la risposta in frequenza del sistema.

Capitolo 5

Campionamento

Problemi affrontati nel presente capitolo:

- campionamento
- ricostruzione esatta e non esatta del segnale a partire dal segnale campionato
- campionamento non ideale

Esercizio 1

Il segnale $s(t) = \text{sinc}^2(200t - 10)$ viene campionato alla minima frequenza di campionamento in grado di evitare aliasing. Supponendo che ogni campione venga rappresentato mediante 12 bit, determinare il numero di bit necessari a memorizzare 15 minuti del segnale $s(t)$.

Soluzione 1

Il passo di campionamento che permette di evitare il fenomeno dell'aliasing è: $T_c \leq \frac{1}{2B}$, dove B indica la banda occupata dal segnale considerato, per cui la minima frequenza di campionamento risulta: $f_{c_{min}} = 2B$. Nel caso dell'esercizio proposto la banda del segnale $s(t)$ risulta pari a $B = 200Hz$. Infatti, si ha:

$$s(t) = \text{sinc}^2(200t - 10) = \text{sinc}^2(200(t - 0,05))$$
$$S(f) = \frac{1}{200}\text{tr}\left(\frac{f}{200}\right)e^{-j2\pi 0,05f}$$

il cui corrispondente spettro di ampiezza risulta un triangolo di durata $[-200Hz, 200Hz]$ e ampiezza $1/200$. Per evitare l'aliasing, il passo di ripetizione delle repliche dello spettro $S(f)$ dovrà essere $f_{c_{min}} = 2B = 2 \cdot 200 = 400Hz$.

Per calcolare il numero di bit N_{bit} necessari per memorizzare 15 minuti del segnale, si deve calcolare il numero di campioni N_c che vengono memorizzati in 15 minuti, e poi moltiplicare il numero di campioni così ottenuto per il numero di bit usati per ogni campione:

$$N_c = \frac{\text{tempo memorizzazione } (sec.)}{T_c \ (sec.)} = \frac{15 \cdot 60}{1/400} = 360000$$
$$N_{bit} = n_c \cdot 12 = 360000 \cdot 12 = 4320000 \ bit$$

Esercizio 2

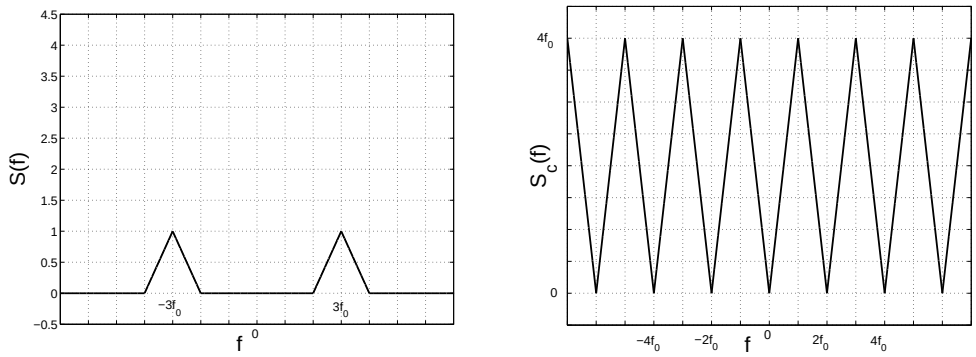
Il segnale $s(t) = 2f_0 \text{sinc}^2(f_0 t)\cos(6\pi f_0 t)$ viene campionato idealmente con passo di campionamento $T_c = 1/(4f_0)$, e viene successivamente filtrato con un filtro passa basso ideale avente banda $[-2f_0, 2f_0]$. Calcolare l'espressione analitica del segnale in uscita al filtro.

Soluzione 2

Si ricorda anzitutto che il processo di campionamento nel tempo produce in frequenza una periodicizzazione dello spettro. In particolare, lo spettro del segnale $S(f)$, viene ripetuto, dopo essere stato modificato in ampiezza di un fattore pari a $1/T_c = 4f_0$, a frequenze multiple di $f_c = 1/T_c = 4f_0$. Lo spettro del segnale $s(t)$ risulta:

$$S(f) = 2\text{tr}\left(\frac{f}{f_0}\right) \otimes \left[\frac{\delta(f-3f_0)+\delta(f+3f_0)}{2}\right] = \text{tr}\left(\frac{f-3f_0}{f_0}\right) + \text{tr}\left(\frac{f+3f_0}{f_0}\right)$$

Gli spettri del segnale $S(f)$ e del segnale campionato $S_c(f) = \frac{1}{T_c}\sum_n S(f - nf_c)$ sono



(a) (b)

Figura 5.1: (a)Spettro $S(f)$ del segnale $s(t)$ e (b) relativo spettro del segnale campionato con $f_c = 4f_0$.

riportati in figura 5.1.

Facendo passare il segnale campionato attraverso un filtro passa basso ideale avente banda $[-2f_0, 2f_0]$, in uscita dal filtro lo spettro $S'_c(f)$ risulta modificato come in figura 5.2. Analiticamente $S'_c(f)$ si può esprimere come:

$$S'_c(f) = 4f_0 \mathrm{tr}\left(\frac{f - f_0}{f_0}\right) + 4f_0 \mathrm{tr}\left(\frac{f + f_0}{f_0}\right)$$

e quindi l'espressione analitica nel tempo del segnale in uscita al filtro risulta:

$$s'_c(t) = 8f_0^2 \mathrm{sinc}^2(f_0 t)\cos(2\pi f_0 t)$$

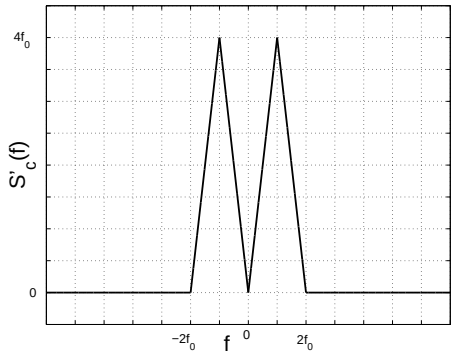


Figura 5.2: Spettro $S'_c(f)$ del segnale in uscita dal filtro

Esercizio 3

Si consideri il segnale reale $s(t)$, con spettro $S(f)$ non nullo nell'intervallo $[-6kHz, 6kHz]$. Il segnale viene prima campionato e successivamente fatto passare attraverso un filtro di ricostruzione $H(f)$, come quello riportato in figura 5.3. Si chiede il valore massimo del passo di campionamento T_c, e il valore dei parametri k_f e A del filtro, affinché si possa recuperare in modo esatto il segnale $s(t)$ all'uscita del filtro.

Soluzione 3

Quando il segnale $s(t)$ viene campionato con passo T_c, in frequenza lo spettro $S(f)$ viene ripetuto, dopo essere stato modificato in ampiezza di un fattore pari a $1/T_c$, alle frequenze $nf_c = n/T_c$. Per recuperare esattamente il segnale, dal teorema di Shannon si sa che T_c deve essere $\leq 1/2B$, dove B indica la banda del segnale campionato. La ricostruzione del segnale deve avvenire poi mediante un filtro passa basso ideale di banda B e ampiezza T_c, per recuperare esattamente la replica in banda base del segnale.

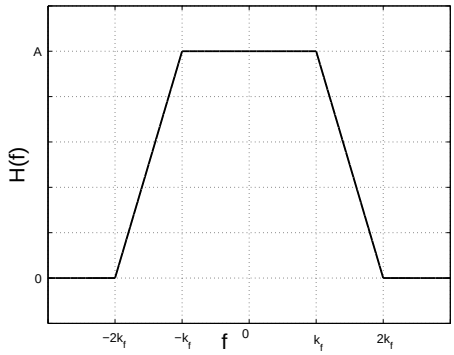


Figura 5.3: Filtro di ricostruzione $H(f)$.

Nel caso dell'esercizio proposto il filtro di ricostruzione non è un passa basso ideale, ma è un filtro di tipo trapezoidale che per le frequenze $|f| \leq k_f$ non distorce il segnale filtrato a meno di un'amplificazione per un fattore A, mentre per le frequenze $k_f < |f| < 2k_f$ distorce il segnale. Per ricostruire esattamente il segnale si deve recuperare solo la replica in banda base dello spettro del segnale campionato; è necessario quindi che la replica in banda base stia nell'intervallo $[-k_f, k_f]$, in modo tale da non essere distorta; inoltre le repliche successive non devono essere selezionate dal filtro, per cui è necessario che la prima replica successiva sia centrata ad una frequenza $f_c \geq 2k_f + B$ (figura 5.4).

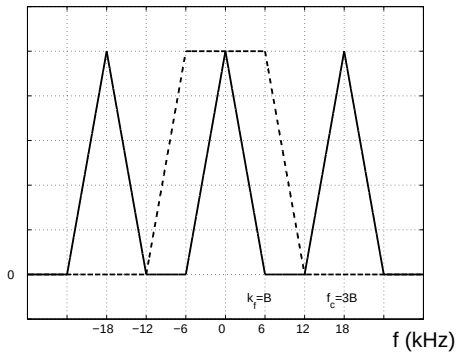


Figura 5.4: Relazione tra il generico spettro del segnale $s(t)$ di banda $[-6kHz, 6kHz]$ campionato (linea continua), e il filtro di ricostruzione $H(f)$ (linea tratteggiata).

Da queste considerazioni si ottiene quindi che:

$$T_c = \frac{1}{f_c} \leq \frac{1}{2k_f + B} \Rightarrow T_{c_{max}} = \frac{1}{2k_f + B}$$

$$B \leq k_f \Rightarrow k_f = B$$

$$A = T_c$$

L'ultima relazione deriva dal fatto che l'ampiezza del filtro deve compensare il fattore $1/T_c$

con cui viene modificato lo spettro del segnale durante il campionamento. Numericamente si ottiene quindi:

$$
\begin{aligned}
&k_f = 6kHz \\
&T_{c_{max}} = \frac{1}{18kHz} \simeq 0,055\ msec \\
&A \simeq 0,055 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}
$$

Esercizio 4

Si consideri il segnale $s(t)$ di tipo passa basso con banda $B = 50Hz$; tale segnale viene campionato senza perdita alla minima frequenza di campionamento $f_{c_{min}}$, dando luogo ad una serie di campioni:

$$
s(nT_c) = \begin{cases} -1 & n = -2; -1 \\ +1 & n = +1; +2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}
$$

Si chiede di determinare il valore del segnale nell'istante $t = 0,005$, cioè $s(0,005)$.

Soluzione 4

Anzitutto si determina il passo di campionamento: sapendo di dover scegliere il passo di campionamento massimo che non produca perdite, si ha:

$$
T_{c_{max}} = \frac{1}{2B} = \frac{1}{100} = 0,01
$$

Il segnale campionato risulta:

$$
s_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_c)\delta(t - nT_c)
$$

Per determinare il valore di $s(0,005)$ si deve ricostruire esattamente il segnale e calcolarne il valore in $t = 0,005$. Per ricostruire il segnale si usa un filtro di ricostruzione di tipo passa basso ideale di banda B:

$$
S_R(f) = S(f) = S_c(f) \cdot T_c \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)
$$

e quindi nel dominio del tempo si ottiene:

$$
s_R(t) = s(t) = s_c(t) \otimes T_c 2B \text{sinc}(2Bt)
$$

Avendo posto $T_c = 1/2B$ si ha:

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_c)\delta(t - nT_c) \otimes \mathrm{sinc}(2Bt) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_c)\mathrm{sinc}(2B(t - nT_c)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_c)\mathrm{sinc}(2Bt - n) \end{aligned}$$

che è proprio la formula di interpolazione per ricostruire il segnale originale $s(t)$ a partire dai campioni $s(nT_c)$ del segnale campionato.

Nel caso specifico i campioni sono tutti nulli eccetto che per $n = \pm 1, \pm 2$; il segnale ricostruito si ottiene quindi come:

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_c)\mathrm{sinc}(f_c t - n) = \\ &= -\mathrm{sinc}(f_c t + 2) - \mathrm{sinc}(f_c t + 1) + \mathrm{sinc}(f_c t - 1) + \mathrm{sinc}(f_c t - 2) \end{aligned}$$

e nell'istante $t = 0,005 = T_c/2$ vale:

$$\begin{aligned} s(0,005) &= -\mathrm{sinc}(1/2 + 2) - \mathrm{sinc}(1/2 + 1) + \mathrm{sinc}(1/2 - 1) + \mathrm{sinc}(1/2 - 2) = \\ &= -\mathrm{sinc}(5/2) + \mathrm{sinc}(-1/2) = -\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right)}{\frac{5}{2}\pi} - \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\frac{1}{2}\pi} \\ &= -\frac{2}{5\pi} - \frac{2}{\pi} = -\frac{12}{5\pi} \simeq 0,76 \end{aligned}$$

Esercizio 5

Dato un segnale $s(t)$ con banda B, lo si campioni con passo $T_c = 1/2B$; si ricostruisca poi un segnale analogico $s'(t)$ interpolando il segnale campionato con le seguenti funzioni:

- $h(t) = \mathrm{sinc}(t/T_c)$
- $h(t) = \mathrm{tr}(t/T_c)$
- $h(t) = \mathrm{tr}(t/2T_c)$

Si discutano i risultati ottenuti nei vari casi.

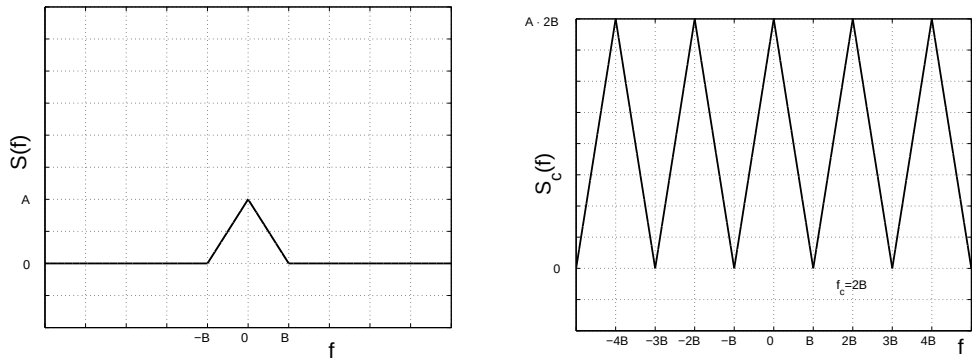
Soluzione 5

Il passo di campionamento proposto nell'esercizio $T_c = 1/2B$ soddisfa la condizione di non aliasing, per cui le ripetizioni dello spettro del segnale campionato non si sovrappongono (figura 5.5). Come visto nell'esercizio precedente il recupero del segnale analogico a partire

dalla successione di campioni consiste nel far passare il segnale campionato attraverso un filtro, cioè:

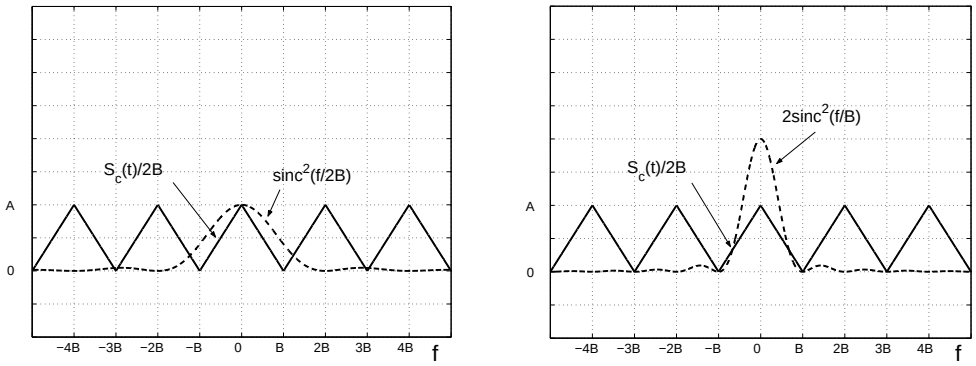
$$S_R(f) = S_c(f) \cdot H(f)$$
$$s_R(t) = s_c(t) \otimes h(t)$$

Se vengono soddisfatte certe condizioni, all'uscita del filtro si recupera esattamente il segnale originale $s(t)$, altrimenti si recupera un segnale $s'(t) \neq s(t)$. Vediamo i 3 casi proposti.



(a) (b)

Figura 5.5: (a)Spettro $S(f)$ del generico segnale $s(t)$ di banda B e (b) relativo spettro del segnale campionato con $T_c = 1/2B$.



(a) (b)

Figura 5.6: Spettro del segnale campionato con filtro di ricostruzione nel secondo caso (a) e filtro di ricostruzione nel terzo caso (b).

- Nel primo caso si ha:

$$s'(t) = s_c(t) \otimes \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right) = s_c(t) \otimes \text{sinc}(2Bt)$$
$$S'(f) = S_c(f) \cdot T_c \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

e quindi si ottiene proprio il recupero del segnale originale $s'(t) = s(t)$.

- Nel secondo caso si ottiene:

$$s'(t) = s_c(t) \otimes \mathrm{tr}\left(\frac{t}{T_c}\right)$$
$$S'(f) = S_c(f) \cdot T_c \mathrm{sinc}^2\left(\frac{f}{2B}\right)$$

  In questo caso come si osserva dalla figura 5.6(a) non si recupera in modo esatto la ripetizione in banda base dello spettro del segnale campionato, ma si ha una distorsione della prima replica, e un recupero parziale delle repliche successive. Si può quindi affermare che $s'(t) \neq s(t)$.

- Infine nell'ultimo caso si ha:

$$s'(t) = s_c(t) \otimes \mathrm{tr}\left(\frac{t}{2T_c}\right)$$
$$S'(f) = S_c(f) \cdot 2T_c \mathrm{sinc}^2\left(\frac{f}{B}\right)$$

  Osservando la figura 5.6(b) si nota che, rispetto al caso precedente, da una parte si ha una distorsione maggiore della replica in banda base, mentre dall'altra le repliche successive vengono attenuate maggiormente. Anche in questo caso si può affermare che $s'(t) \neq s(t)$.

Esercizio 6

Si consideri un segnale $s(t)$ con spettro $S(f) = A\cos\left(\frac{2\pi f}{4B}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$. Il segnale $s(t)$ viene campionato mediante una successione $i(t)$ di impulsi triangolari aventi durata τ, area unitaria e distanza T_c l'uno dall'altro, producendo il segnale campionato $s_c(t) = i(t)s(t)$.

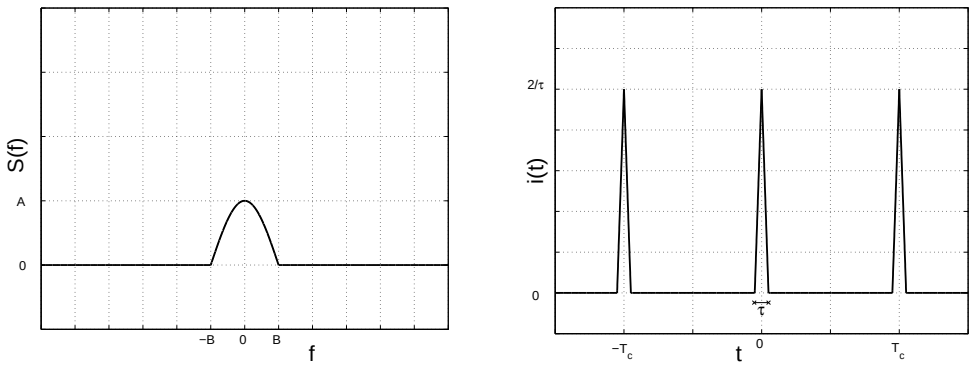
- Si discuta la possibilità di recuperare esattamente $s(t)$ a partire da $s_c(t)$.
- Si ponga poi $T_c = 1/4B$ e si faccia passare $s_c(t)$ attraverso un filtro passa banda ideale centrato a frequenza $f_0 = 4B$, con banda $2B$ e ampiezza T_c: si calcoli l'energia del segnale $s'(t)$ all'uscita del filtro.

Soluzione 6

Lo spettro del segnale $S(f)$ è un coseno di periodo $4B$ troncato tra $[-B, B]$ (figura 5.7)(a).

La successione di impulsi triangolari $i(t)$ è la ripetizione con passo T_c del triangolo $i_T(t) = \frac{2}{\tau}\mathrm{tr}\left(\frac{t}{\tau/2}\right)$ (figura 5.7(b)):

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\tau}\mathrm{tr}\left(\frac{t - nT_c}{\tau/2}\right)$$



(a) (b)

Figura 5.7: (a) Spettro $S(f)$ e (b) successione $i(t)$ di impulsi triangolari.

Il segnale campionato risulta:

$$s_c(t) = s(t) \cdot i(t)$$
$$S_c(f) = S(f) \otimes I(f)$$

La trasformata di Fourier del segnale periodico $i(t)$ può essere calcolata mediante la formula di Poisson:

$$\begin{aligned} I(f) =& \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_T(f)|_{f=k/T_c}\, \delta\left(f - \frac{k}{T_c}\right) = \\ =& \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\tau}{2}\frac{k}{T_c}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_c}\right) \end{aligned}$$

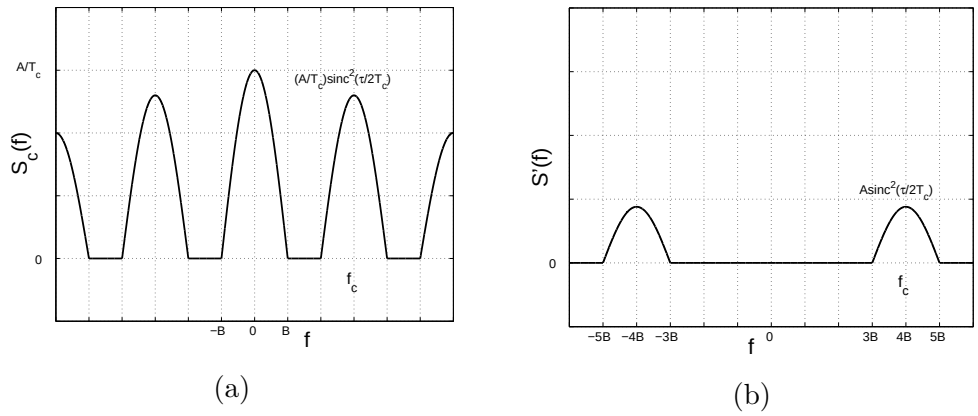
dove $I_T(f)$ è la trasformata di Fourier del singolo triangolo $i_T(t)$. Lo spettro del segnale campionato risulta quindi:

$$\begin{aligned} S_c(f) =& S(f) \otimes \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\tau}{2}\frac{k}{T_c}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_c}\right) = \\ =& \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\tau}{2}\frac{k}{T_c}\right) S\left(f - \frac{k}{T_c}\right) \end{aligned}$$

che corrisponde alla ripetizione dello spettro $S(f)$ con passo $1/T_c$ e attenuato di $\frac{1}{T_c}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\tau}{2}\frac{k}{T_c}\right)$ (figura 5.8(a)).

- Il segnale $s(t)$ può essere, quindi, recuperato esattamente dal segnale campionato se $1/T_c \geq 2B$, e se viene utilizzato un filtro passa basso ideale di banda $[-B, B]$ e ampiezza T_c.

  Nota: cosa succede se per la successione di impulsi triangolari vale $\tau = T_c$? E se il segnale $i(t)$ è una successione di impulsi rettangolari?



(a) (b)

Figura 5.8: (a) Spettro $S_c(f)$ del segnale campionato con T_c generico e (b) spettro $S_c(f)$ del segnale campionato con $T_c = 1/4B$ e filtrato da un passa banda.

- Nel caso in cui $T_c = 1/4B$ e il segnale campionato viene fatto passare attraverso un fltro passa banda ideale centrato a frequenza $f_0 = 4B$, con banda $2B$ e ampiezza T_c, lo spettro del segnale risultante $S'(f)$ non è altro che la prima replica del segnale campionato, cioè il coseno troncato traslato in $f = 4B$, di ampiezza $A\text{sinc}^2\left(\frac{\tau}{2T_c}\right)$ (figura 5.8(b)). Per calcolare l'energia di $s'(t)$ si può ricorrere al teorema di Parseval per cui vale:

$$E_{s'} = \int_{-\infty}^{\infty} |s'(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S'(f)|^2 df$$

e quindi si ottiene:

$$\begin{aligned}
E_{s'} = & \int_{-\infty}^{\infty} |S'(f)|^2 df = 2\int_{3B}^{5B} |S'(f)|^2 df = \\
=& 2\int_{-B}^{B} \left[A\text{sinc}^2\left(\frac{\tau}{2T_c}\right)\cos\left(\frac{2\pi f}{4B}\right)\right]^2 df = \\
=& 2A^2\text{sinc}^4(\tau 2B)\int_{-B}^{B} \cos^2\left(\frac{2\pi f}{4B}\right) df = \\
=& 2A^2\text{sinc}^4(\tau 2B) 2\int_{0}^{B} \frac{1+\cos\left(\frac{\pi f}{B}\right)}{2} df = \\
=& 4A^2\text{sinc}^4(\tau 2B)\left[\frac{B}{2}+0\right] = 2A^2 B\text{sinc}^4(\tau 2B)
\end{aligned}$$

essendo nullo l'integrale del coseno (di periodo $2B$) calcolato sul semiperiodo $[0, B]$.

Esercizio 7

Dato il segnale $s(t) = \text{sinc}^2(Bt)$, lo si campioni con frequenza di campionamento $f_c = 2B$, ottenendo la successione di campioni $s(n/f_c)$. Si alteri ora il valore di questi campioni andando a dimezzare il valore dei campioni di posizione dispari, ottenendo così il segnale campionato $s'_c(t)$. Si determini il segnale analogico $s'(t)$ che si ricostruisce facendo passare $s'_c(t)$ attraverso un filtro passa basso ideale di banda B.

Soluzione 7

Il segnale campionato $s_c(t)$ può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} s_c(t) =& s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_c) = s(t) \cdot \left[\sum_{n\text{pari}} \delta(t - nT_c) + \sum_{n\text{dispari}} \delta(t - nT_c) \right] \\ =& s(t) \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2n)T_c) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2n+1)T_c) \right] \end{aligned}$$

potendo in generale scomporre la sommatoria con passo nT_c in due sommatorie per n pari e n dispari, con passo $2nT_c$. La modifica fatta ai campioni $s(nT_c)$ agisce solo sui campioni dispari dimezzandoli, per cui si ha:

$$s'_c(t) = s(t) \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n2T_c) + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + T_c - n2T_c) \right]$$

In pratica, si ottengono due treni di delta di periodo $2T_c$, di cui il secondo ha ampiezza $1/2$ ed è traslato di T_c. Passando nel dominio della frequenza si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} S'_c(f) =& S(f) \otimes \left[\frac{1}{2T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{2T_c}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{2T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{2T_c}\right) e^{-j2\pi f T_c} \right] = \\ =& \frac{1}{2T_c} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{n}{2T_c}\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{n}{2T_c}\right) e^{-j2\pi \frac{n}{2T_c} T_c} \right] = \\ =& \frac{1}{2T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{n}{2T_c}\right) \left[1 + \frac{1}{2} e^{-j\pi n} \right] \end{aligned}$$

che è la ripetizione dello spettro $S(f)$ con passo $\frac{1}{2T_c} = \frac{f_c}{2} = B$ e ampiezze modificate da $\frac{1}{2T_c}\left[1 + \frac{1}{2}e^{-j\pi n}\right]$ (figura 5.9). Il segnale $s'_c(t)$ viene fatto passare poi attraverso un filtro passa basso di banda B, dando luogo allo spettro $S'(f)$ riportato in figura 5.10, che può essere scritto analiticamente come:

$$S'(f) = \text{tr}\left(\frac{f}{B}\right) + \frac{1}{2}\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

e quindi il segnale ricostruito $s'(t)$ risulta:

$$s'(t) = B\text{sinc}^2\left(Bt\right) + B\text{sinc}\left(2Bt\right)$$

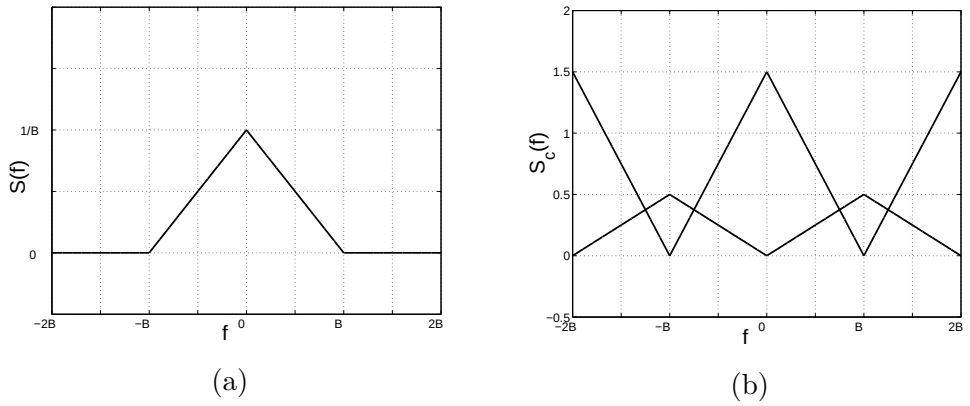


Figura 5.9: (a) Spettro del segnale $s(t)$ e (b) spettro del segnale $s(t)$ campionato con $f_c = 2B$.

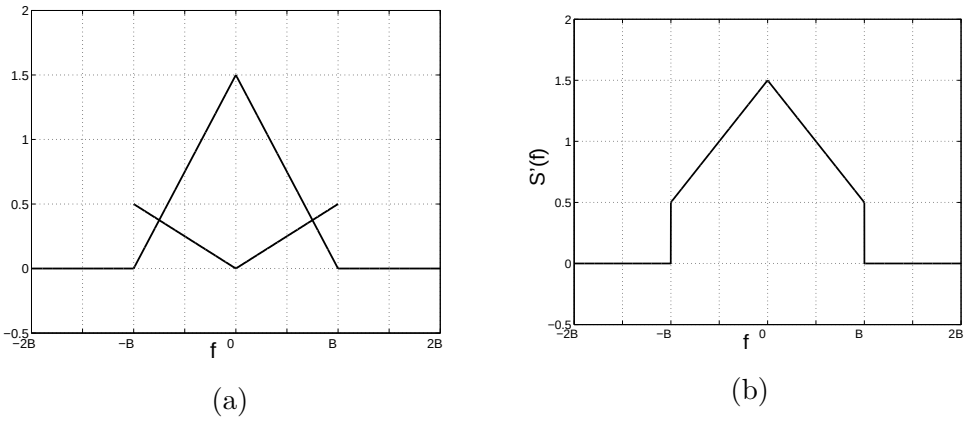


Figura 5.10: (a) Spettro del segnale campionato dopo il filtraggio con passa basso di banda B e (b) spettro risultante.

Altri esercizi

1. Si determini la minima frequenza di campionamento alla quale può essere campionato il segnale $s(t) = \text{sinc}(500t)\cos(500\pi t)$ per evitare il fenomeno dell'aliasing.

2. Il segnale $s(t) = \text{sinc}^2(400t)\cos(800\pi t)$ viene campionato alla minima frequenza di campionamento necessaria per non provocare aliasing. Sapendo che ogni campione viene rappresentato tramite 12 bit, si calcoli il numero di bit necessari a memorizzare 5 secondi del segnale.

3. Il segnale $s(t) = \cos(200\pi t)$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_c = 100Hz$. Il segnale campionato viene fatto passare per un filtro passa basso ideale avente banda pari a $150Hz$. Si determini il segnale all'uscita del filtro e se ne disegni l'andamento grafico.

4. Un segnale $x(t)$, avente trasformata identicamente nulla per $|f| > B$, viene campi-

onato idealmente con frequenza di campionamento $f_c = 2B$. Il segnale campionato viene quindi fatto passare per un filtro passa banda ideale con banda passante compresa tra B e $3B$ (e $-3B$ e $-B$). Si chiede di calcolare l'espressione del segnale $y(t)$ all'uscita del filtro.

Capitolo 6

Processi stocastici

Problemi affrontati nel presente capitolo:

- calcolo della media e autocorrelazione di processi stocastici
- studio della stazionarità in senso lato di processi stocastici
- calcolo della densità spettrale di potenza media e della potenza media di processi stocastici
- analisi di processi stocastici stazionari in senso lato che passano da sistemi lineari tempo invarianti

Esercizio 1

Si consideri il processo stocastico $\mathbf{x}(k,t)$ definito come:

$$\mathbf{x}(k,t) = A\cos(2\pi f_0 t + |\theta|)$$

con la variabile aleatoria θ distribuita uniformemente nell'intervallo $[-\pi,\pi]$. Calcolare media e autocorrelazione del processo $\mathbf{x}(k,t)$ e studiarne la stazionarietà in senso lato.

Soluzione 1

Si ricordano le definizioni della media e dell'autocorrelazione per un generico processo stocastico $\mathbf{x}(k,t)$:

$$\mu_{\mathbf{x}}(t) = E[\mathbf{x}(k,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\mathbf{x}(k,t)}(x)dx$$

$$H_{\mathbf{xx}}(t_1,t_2) = E[\mathbf{x}(k,t_1)\cdot\mathbf{x}(k,t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_{\mathbf{x}(k,t_1)\mathbf{x}(k,t_2)}(x_1x_2)dx_1dx_2$$

In particolare, nel caso dell'esercizio proposto, il processo dipende dalla variabile aleatoria θ, e pertanto si può scrivere che:

$$\mu_{\mathbf{x}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A\cos(2\pi f_0 t + |\theta|) \cdot f_\theta(\theta) d\theta$$

$$H_{\mathbf{xx}}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} A\cos(2\pi f_0 t_1 + |\theta|) \cdot A\cos(2\pi f_0 t_2 + |\theta|) \cdot f_\theta(\theta) d\theta$$

Per la verifica della stazionarietà in senso lato, devono essere soddisfatte le condizioni che la media del processo sia indipendente dal tempo e che la sua autocorrelazione dipenda solo dalla differenza degli istanti temporali ($t_1 - t_2 = \tau$), cioè:

$$\mu_{\mathbf{x}}(t) = \mu_{\mathbf{x}} = \text{costante}$$
$$H_{\mathbf{xx}}(t_1, t_2) = H_{\mathbf{xx}}(t_1 - t_2) = H_{\mathbf{xx}}(\tau)$$

La densità di probabilità $f_\theta(\theta)$ della variabile aleatoria θ vale $1/2\pi$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e 0 altrove; si ottiene quindi:

$$\begin{aligned}
\mu_{\mathbf{x}}(t) = E[\mathbf{x}(k,t)] &= \int_{-\pi}^{\pi} A\cos(2\pi f_0 t + |\theta|) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = \\
&= \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \cos(2\pi f_0 t - \theta) d\theta + \frac{A}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \cos(2\pi f_0 t + \theta) d\theta = \\
&= \frac{A}{2\pi} [-\sin(2\pi f_0 t - \theta)]\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{A}{2\pi} [\sin(2\pi f_0 t + \theta)]\Big|_{0}^{\pi} = \\
&= \frac{A}{2\pi} [-\sin(2\pi f_0 t) + \sin(2\pi f_0 t + \pi)] + \frac{A}{2\pi} [\sin(2\pi f_0 t + \pi) - \sin(2\pi f_0 t)] = \\
&= \frac{A}{2\pi} [-4 \cdot \sin(2\pi f_0 t)] = -\frac{2A}{\pi} \sin(2\pi f_0 t)
\end{aligned}$$

essendo $\sin(2\pi f_0 t + \pi) = -\sin(2\pi f_0 t)$. La media vale quindi:

$$\mu_{\mathbf{x}}(t) = -\frac{2A}{\pi} \sin(2\pi f_0 t)$$

Per il calcolo dell'autocorrelazione si ha:

$$\begin{aligned}
H_{\mathbf{xx}}(t_1, t_2) = E[\mathbf{x}(k,t_1) \cdot \mathbf{x}(k,t_2)] &= E\left[A\cos(2\pi f_0 t_1 + |\theta|) \cdot A\cos(2\pi f_0 t_2 + |\theta|)\right] \\
&= E\left[\frac{A^2}{2} [\cos(2\pi f_0 (t_1 + t_2) + 2|\theta|) + \cos(2\pi f_0 (t_1 - t_2))]\right] = \\
&= \frac{A^2}{2} E[\cos(2\pi f_0 (t_1 + t_2) + 2|\theta|)] + \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)
\end{aligned}$$

Si noti che nel secondo termine della precedente espressione non compare più l'operatore E valore atteso, dato che si è persa la dipendenza dalla variabile aleatoria θ. Procedendo al calcolo del primo termine, si verifica facilmente che risulta pari a 0, infatti:

$$E[\cos(2\pi f_0(t_1+t_2)+2|\theta|)] =$$
$$= \int_{-\pi}^{0} \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi f_0(t_1+t_2)-2\theta)d\theta + \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi f_0(t_1+t_2)+2\theta)d\theta = 0$$

essendo nullo il risultato dei 2 integrali, dato che l'integrale di una funzione sinusoidale di argomento 2θ integrata sul suo periodo π risulta nulla. L'autocorrelazione vale quindi:

$$H_{\mathbf{xx}}(t_1,t_2) = H_{\mathbf{xx}}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)$$

Si conclude allora che il processo $\mathbf{x}(k,t)$ non è stazionario in senso lato, dato che pur essendo la sua autocorrelazione dipendente solo da τ, la sua media non è costante ma dipende dal tempo t.

Esercizio 2

Date 3 variabili aleatorie indipendenti $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e θ aventi distribuzione uniforme rispettivamente in $[-1,1]$, $[-2,2]$ e $[0,4\pi]$, si calcoli la densità spettrale di potenza media del seguente processo stocastico:

$$\mathbf{x}(k,t) = (\mathbf{A}+2\mathbf{B})\cos(300\pi t-\theta) + \mathbf{n}(k,t)$$

dove $\mathbf{n}(k,t)$ è un rumore bianco a media nulla indipendente da $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e θ, avente autocorrelazione $H_{nn}(\tau) = 10\delta(\tau)$.

Soluzione 2

Per processi stocastici stazionari in senso lato si definisce la densità spettrale di potenza media come la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione del processo:

$$S_{\mathbf{xx}}(f) = \mathcal{F}\{H_{\mathbf{xx}}(\tau)\}$$

Per prima cosa quindi si deve verificare che il processo $\mathbf{x}(k,t)$ sia stazionario in senso lato; si calcola poi la sua autoccorelazione e infine si ottiene la densità spettrale di potenza media del processo.

In figura 6.1 sono riportate le densità di probabilità delle 3 variabili aleatorie $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e θ rispettivamente. Tenendo conto dell'indipendenza della variabile aleatoria θ dalle variabili aleatorie $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, la media $\mu_{\mathbf{x}}(t)$ si può scrivere come:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbf{x}}(t) =& E\left[(\mathbf{A}+2\mathbf{B})\cos(300\pi t-\theta)+\mathbf{n}(k,t)\right] = \\ =& (E[\mathbf{A}]+2E[\mathbf{B}])\cdot E[\cos(300\pi t-\theta)] + E[\mathbf{n}(k,t)]\end{aligned}$$

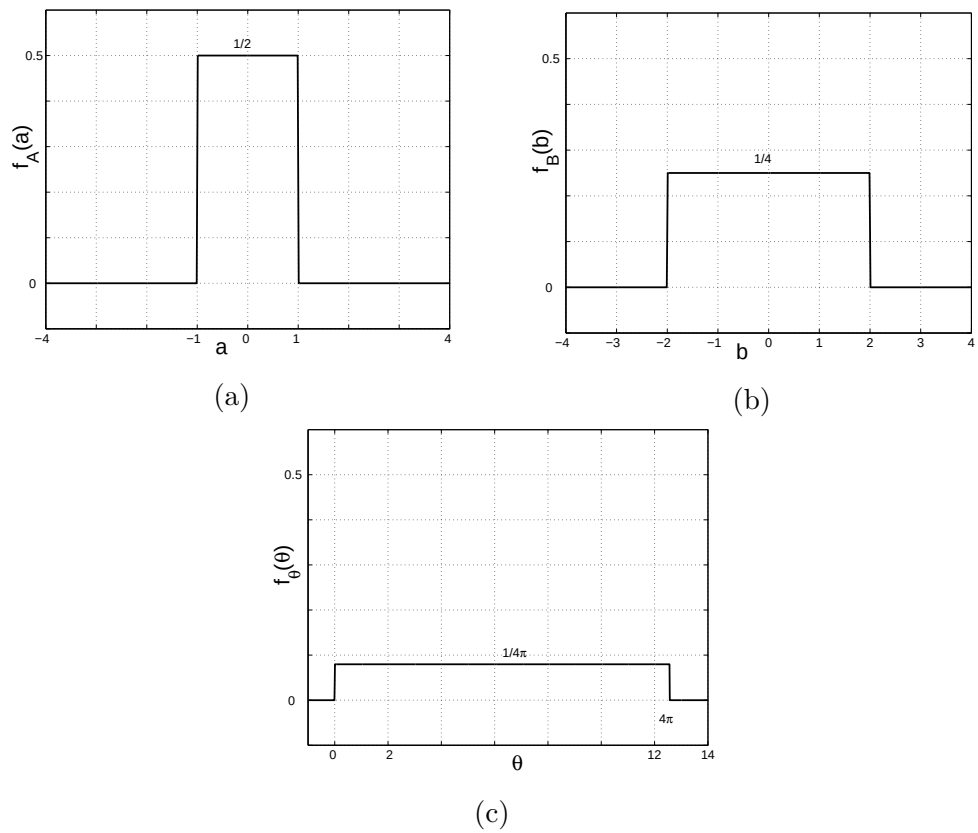


Figura 6.1: Densità di probabilità delle variabili aleatorie (a) **A**, (b) **B** e (c) θ

Il processo $\mathbf{n}(k,t)$ è a media nulla: rimane da calcolare la media delle variabili aleatorie **A** e **B**, e la media del processo $\cos(300\pi t - \theta)$. Si verifica facilmente che **A** e **B** hanno media nulla:

$$\mu_{\mathbf{A}} = E[\mathbf{A}] = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} a \; da = 0$$

$$\mu_{\mathbf{B}} = E[\mathbf{B}] = \int_{-2}^{2} \frac{1}{4} b \; db = 0$$

essendo gli integrali di funzioni dispari integrate su un intervallo simmetrico rispetto all'origine. Inoltre, la media del processo risulta:

$$E[\cos(300\pi t - \theta)] = \int_{0}^{4\pi} \frac{1}{4\pi} \cos(300\pi t - \theta) \; d\theta = 0$$

essendo l'integrale di una funzione sinusoidale di argomento θ, periodica di 2π, integrata su 4π (due volte il periodo). La media del processo $\mathbf{x}(k,t)$ risulta quindi costante e pari a 0: viene così soddisfatta la prima condizione per la stazionarietà in senso lato del processo.

Si procede quindi al calcolo dell'autocorrelazione:

$$\begin{aligned}
H_{\mathbf{xx}}(t_1,t_2) =& E\left[\{(\mathbf{A}+2\mathbf{B})\cos(300\pi t_1-\theta)+\mathbf{n}(k,t_1)\}\cdot\{(\mathbf{A}+2\mathbf{B})\cos(300\pi t_2-\theta)+\mathbf{n}(k,t_2)\}\right] = \\
=& E[(\mathbf{A}+2\mathbf{B})^2\cos(300\pi t_1-\theta)\cos(300\pi t_2-\theta)+(\mathbf{A}+2\mathbf{B})\cos(300\pi t_1-\theta)\mathbf{n}(k,t_2)+ \\
&+(\mathbf{A}+2\mathbf{B})\cos(300\pi t_2-\theta)\mathbf{n}(k,t_1)+\mathbf{n}(k,t_1)\mathbf{n}(k,t_2)] = \\
=& E\left[(\mathbf{A}+2\mathbf{B})^2\right]\cdot E\left[\cos(300\pi t_1-\theta)\cos(300\pi t_2-\theta)\right]+ \\
&+E\left[(\mathbf{A}+2\mathbf{B})\right]\cdot E\left[\cos(300\pi t_1-\theta)\right]\cdot E\left[\mathbf{n}(k,t_2)\right]+ \\
&+E\left[(\mathbf{A}+2\mathbf{B})\right]\cdot E\left[\cos(300\pi t_2-\theta)\right]\cdot E\left[\mathbf{n}(k,t_1)\right]+ \\
&+E\left[\mathbf{n}(k,t_1)\mathbf{n}(k,t_2)\right]
\end{aligned}$$

Il secondo e il terzo termine si annullano dato che sia le variabili aleatorie $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, che i processi $\cos(300\pi t-\theta)$ e $\mathbf{n}(k,t)$ hanno media nulla. Il quarto termine è proprio l'autocorrelazione del rumore $\mathbf{n}(k,t)$, che vale $H_{nn}(\tau)=10\delta(\tau)$. Rimane quindi da analizzare il primo termine.

$$E[(\mathbf{A}+2\mathbf{B})^2] = E[\mathbf{A}^2]+4E[\mathbf{B}^2]+4E[\mathbf{A}]E[\mathbf{B}] = E[\mathbf{A}^2]+4E[\mathbf{B}^2]$$

essendo $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ a media nulla. Si calcola quindi il valore quadratico medio:

$$E[\mathbf{A}^2] = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}a^2\ da = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{1}a^2\ da = \left(\frac{1^3}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$E[\mathbf{B}^2] = \int_{-2}^{2}\frac{1}{4}b^2\ db = 2\cdot\frac{1}{4}\int_{0}^{2}b^2\ db = \frac{1}{2}\left(\frac{2^3}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Il termine $E[\cos(300\pi t_1-\theta)\cos(300\pi t_2-\theta)]$ non è altro che l'autocorrelazione del processo $\cos(300\pi t-\theta)$, che risulta:

$$\begin{aligned}
E[\cos(300\pi t_1-\theta)\cos(300\pi t_2-\theta)] =& \frac{1}{2}E[\cos(300\pi(t_1+t_2)-2\theta)+\cos(300\pi(t_1-t_2))] = \\
=& \frac{1}{2}\int_{0}^{4\pi}\frac{1}{4\pi}\cos(300\pi(t_1+t_2)-2\theta)\ d\theta+\frac{1}{2}\cos(300\pi\tau) = \\
=& \frac{1}{2}\cos(300\pi\tau)
\end{aligned}$$

essendo nullo l'integrale del coseno di argomento 2θ di periodo π, integrato su 4π (4 volte il periodo). Si ottiene quindi che l'autocorrelazione del processo $\mathbf{x}(k,t)$ dipende solo da $\tau=t_1-t_2$ e vale:

$$H_{\mathbf{xx}}(\tau) = \left(\frac{1}{3}+4\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\cos(300\pi\tau)+10\delta(\tau) = \frac{17}{6}\cos(300\pi\tau)+10\delta(\tau)$$

Per il processo stazionario in senso lato si calcola allora la densità spettrale di potenza media come:

$$S_{\mathbf{xx}}(f) = \mathcal{F}\{H_{\mathbf{xx}}(\tau)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{17}{6}\cos(300\pi\tau)+10\delta(\tau)\right\} = \frac{17}{12}[\delta(f-150)+\delta(f+150)]+10$$

Esercizio 3

L'autocovarianza $C_{xx}(\tau)$ di un processo stocastico $\mathbf{x}(k,t)$ con densità di probabilità distribuita uniformemente tra 0 e 10 è data da:

$$C_{xx}(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

Calcolare la densità spettrale di potenza media di $\mathbf{x}(k,t)$ e il valore del parametro A.

Soluzione 3

La densità spettrale di potenza media del processo $\mathbf{x}(k,t)$ si calcola come la trasformata di Fourier della sua autocorrelazione. Sapendo che l'autocovarianza e l'autocorrelazione sono legate dalla relazione:

$$H_{xx}(\tau) = C_{xx}(\tau) + \mu_{\mathbf{x}}^2$$

come primo passo si calcola la media del processo $\mathbf{x}$, di cui è nota la densità di probabilità. Quindi, applicando la definizione si ottiene:

$$\mu_{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}(k,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\mathbf{x}(k,t)}(x)\ dx = \int_{0}^{10} \frac{1}{10} x\ dx = \frac{1}{10}\left(\frac{10^2}{2}\right) = 5$$

L'autocorrelazione risulta allora:

$$H_{xx}(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\cos(2\pi f_0 \tau) + 25$$

Per il calcolo della trasformata di Fourier, ricordando che $\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$, si ottiene:

$$S_{xx}(f) = \frac{A}{2}\left[\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2(f-f_0)^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2(f+f_0)^2}\right] + 25\delta(f)$$

Per determinare il valore del parametro A si deve pensare a qualche relazione, riguardante le grandezze statistiche in gioco (H_{xx}, C_{xx}, ecc.), che deve essere soddisfatta. In particolare, si considera che il valore dell'autocorrelazione calcolata in 0 coincide con il valore quadratico medio del processo:

$$H_{xx}(0) = E[\mathbf{x}(k,t+\tau)\mathbf{x}(k,t)]|_{\tau=0} = E[\mathbf{x}^2(k,t)]$$

Il valore quadratico medio del processo può essere facilmente calcolato a partire dalla densità di probabilità di $\mathbf{x}$:

$$E[\mathbf{x}^2(k,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{\mathbf{x}(k,t)}(x)\ dx = \int_{0}^{10} \frac{1}{10} x^2\ dx = \frac{1}{10}\left(\frac{10^3}{3}\right) = \frac{100}{3}$$

Si conclude quindi:

$$H_{xx}(0) = A + 25 = \frac{100}{3} \Longrightarrow A = \frac{100}{3} - 25 = \frac{25}{3}$$

Esercizio 4

A partire dal processo $\mathbf{s}(k,t)$ stazionario in senso lato si costruisca il processo:

$$\mathbf{y}(k,t) = \int_{t-T}^{t+T} \mathbf{s}(k,u)du$$

a) verificare che $\mathbf{y}(k,t)$ è stazionario in senso lato;

b) esprimere la densità spettrale di potenza media di $\mathbf{y}(k,t)$ in funzione di quella di $\mathbf{s}(k,t)$;

c) calcolare la potenza media del processo $\mathbf{y}(k,t)$ nel caso che $\mathbf{s}(k,t)$ sia un rumore bianco con densità spettrale di potenza media $N_0/2 = 2 \cdot 10^{-21} W/Hz$ e $T = 25s$.

Soluzione 4

a) Il processo $\mathbf{y}(k,t)$ è l'uscita di un sistema lineare tempo invariante (SLTI): infatti il processo $\mathbf{s}(k,t)$ passa attraverso un sistema integratore:

$$\mathbf{y}(k,t) = \int_{t-T}^{t+T} \mathbf{s}(k,u)du = \int_{-\infty}^{t+T} \mathbf{s}(k,u)du - \int_{-\infty}^{t-T} \mathbf{s}(k,u)du$$

e che quindi gode delle proprietà di linearità e di tempo invarianza. Si può quindi concludere che il processo $\mathbf{y}(k,t)$ è stazionario in senso lato, in quanto è l'uscita di un SLTI al cui ingresso è posto un processo stazionario in senso lato.

b) Per calcolare la densità spettrale di potenza media di $\mathbf{y}(k,t)$ si può utilizzare la relazione che lega la densità spettrale di potenza media di un processo SSL in uscita da un SLTI alla densità spettrale di potenza media del processo SSL in ingresso al sistema e la risposta in frequenza del sistema stesso:

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f)\|H(f)\|^2$$

dove $H(f)$ è appunto la risposta in frequenza del sistema. Per ottenere $H(f)$, si calcola la risposta impulsiva del sistema e poi se ne fa la trasformata di Fourier. Dalla definizione del processo $\mathbf{y}(k,t)$, si ha:

$$\mathbf{y}(k,t) = \int_{t-T}^{t+T} \mathbf{s}(k,u)du = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{s}(k,u)\mathrm{rect}\left(\frac{t-u}{2T}\right)du = \mathbf{s}(k,t) \otimes \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

ottenendo così che $h(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$. In modo alternativo si poteva procedere:

$$h(t) = \int_{t-T}^{t+T} \delta(u)du = \int_{-\infty}^{t+T} \delta(u)du - \int_{-\infty}^{t-T} \delta(u)du = \mathrm{u}(t+T) - \mathrm{u}(t-T) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

La risposta in frequenza risulta allora: $H(f) = 2T\text{sinc}(2Tf)$ e la densità spettrale di potenza media di $\mathbf{y}(k,t)$:

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f)4T^2\text{sinc}^2(2Tf)$$

c) La potenza media del processo $\mathbf{y}(k,t)$ viene calcolata come l'integrale della densità spettrale di potenza media che equivale, per le proprietà della trasformata di Fourier, al valore dell'autocorrelazione in 0:

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(f) = H_{yy}(0)$$

Essendo $\mathbf{s}(k,t)$ rumore bianco con densità spettrale di potenza media pari a $N_0/2$, si ha:

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} 4T^2\text{sinc}^2(2Tf)df = N_0T \int_{-\infty}^{\infty} 2T\text{sinc}^2(2Tf)df = N_0T \text{ tr}\left(\frac{t}{2T}\right)\Big|_{t=0} = N_0T$$

avendo sostituito l'integrale del sinc^2 con la sua antitrasformata calcolata in 0. Numericamente quindi la potenza media del processo $\mathbf{y}(k,t)$ risulta: $P_y = 4 \cdot 10^{-21} \cdot 25 = 10^{-19}W$

Esercizio 5

La densità spettrale di potenza media di un processo stocastico $\mathbf{x}(k,t)$ stazionario in senso lato a media nulla è pari a:

$$S_{xx}(f) = \begin{cases} 1 - \frac{|f|}{f_0} & |f| \leq f_0 \\ 0 & |f| > f_0 \end{cases}$$

a) determinare la funzione di autocorrelazione di $\mathbf{x}(k,t)$ e disegnarne l'andamento, e calcolare la potenza media del processo;

b) dovendo campionare il processo $\mathbf{x}(k,t)$, determinare il minimo passo di campionamento tale da garantire campioni scorrelati.

Soluzione 5

a) La funzione di autocorrelazione del processo $\mathbf{x}(k,t)$ si calcola come l'antitrasformata di Fourier della densità spettrale di potenza media $S_{xx}(f)$. In figura 6.2(a) è riportato l'andamento grafico di $S_{xx}(f)$, che è un triangolo di ampiezza 1 e durata $2f_0$: $S_{xx}(f) = \text{tr}\left(\frac{f}{f_0}\right)$. L'autocorrelazione risulta perciò: $H_{xx}(\tau) = f_0\text{sinc}^2(f_0\tau)$, il cui

andamento è riportato in figura 6.2(b). La potenza media del processo viene calcolata come l'integrale della densità spettrale di potenza media, che in questo caso risulta essere l'area del triangolo di base $2f_0$ e altezza unitaria, o, in alternativa, come il valore dell'autocorrelazione in 0:

$$P_m = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)df = H_{xx}(0) = f_0$$

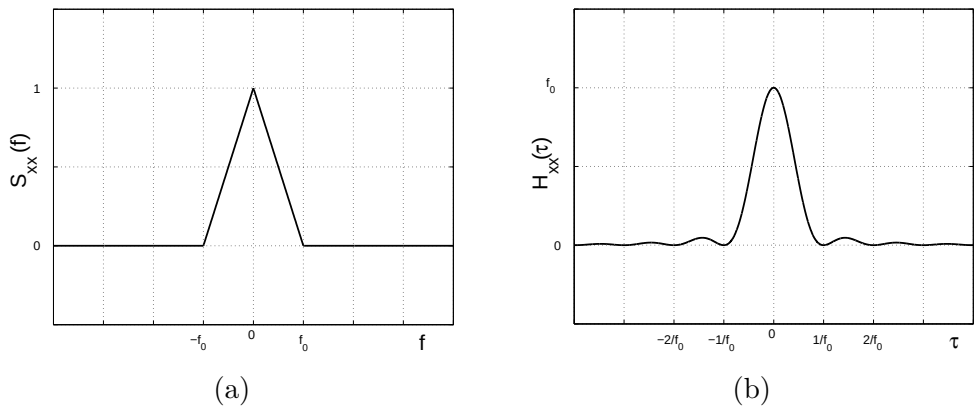


Figura 6.2: (a) Densità spettrale di potenza media e (b) autocorrelazione del processo $\mathbf{x}(k,t)$

b) In generale due variabili aleatorie A e B sono scorrelate quando la loro covarianza è pari a 0:

$$E[(A-\mu_A)(B-\mu_B)] = E[AB] - \mu_A\mu_B = 0$$

Se almeno una delle variabili aleatorie ha media nulla, allora la scorrelatezza si ha quando la correlazione pari a 0: $E[AB] = 0$.

Nel caso di processi stazionari in senso lato le funzioni di autocovarianza e di autocorrelazione al tempo τ rappresentano proprio la covarianza e la correlazione tra due campioni del processo distanti τ: per ottenere la scorrelatezza quindi, si devono prendere dei campioni a distanza τ^* tale che $C_{xx}(\tau^*) = 0$. Essendo poi il processo a media nulla, allora questo equivale a cercare un τ^* tale che la funzione di autocorrelazione si annulli. In particolare, osservando l'andamento dell'autocorrelazione in figura 6.2(b), si nota che il minimo valore di τ per cui l'autocorrelazione ha valore nullo è $1/f_0$. Il minimo passo di campionamento del processo $\mathbf{x}(k,t)$ per garantire la scorrelatezza dei campioni è quindi: $T_c = 1/f_0$.

Esercizio 6

Si consideri il segnale aleatorio $\mathbf{x}(k,t) = \sum_k A_k \text{rect}\left(\frac{t-4kT-\tau}{4T}\right)$, costituito da una sequenza di impulsi di durata $4T$ e di ampiezza casuale A_k. Le ampiezze A_k, espresse in volt, assumono solo i valori $(-3,-1,+1,+3)$ e possono essere assimilate a variabili aleatorie indipendenti caratterizzate dalle probabilità: $P(-3) = 0.2$, $P(-1) = 0.3$, $P(+1) = 0.2$, $P(+3) = 0.3$. La sequenza di impulsi non è sincronizzata e il ritardo τ rispetto all'origine dell'asse dei tempi è assimilabile ad una variabile aleatoria con densità di probabilità uniforme tra 0 e $4T$. Sapendo che τ è indipendente da A_k $\forall k$, calcolare la densità spettrale di potenza media del processo e disegnarne l'andamento grafico. Calcolare inoltre la percentuale di potenza contenuta nella componente in continua.

Soluzione 6

Il processo $\mathbf{x}(k,t)$ è stazionario in senso lato con media e varianza pari a:

$$\mu_x(t) = \mu_x = E[A_k]$$

$$H_{xx}(t_1,t_2) = H_{xx}(\tau) = \begin{cases} (E[A_k])^2 & |t_2-t_1| = |\tau| > 4T \\ E[A_k^2]\left(1-\frac{|\tau|}{4T}\right) + (E[A_k])^2\frac{|\tau|}{4T} & |t_2-t_1| = |\tau| < 4T \end{cases}$$

dove $E[A_k]$ e $E[A_k^2]$ rappresentano il valor medio μ_{A_k} e il valore quadratico medio della variabile aleatoria A_k. L'espressione dell'autocorrelazione per $|\tau| < 4T$ si può anche riscrivere come:

$$H_{xx}(\tau) = E[A_k^2] - \left(E[A_k^2] - (E[A_k])^2\right)\frac{|\tau|}{4T} = E[A_k^2] - \sigma_{A_k}^2\frac{|\tau|}{4T} \quad |\tau| < 4T$$

ricordando la relazione che lega il valore quadratico medio e la varianza di una variabile aleatoria. Tale andamento corrisponde ad un triangolo di ampiezza $\sigma_{A_k}^2$, durata $8T$ e alzato di un fattore $(E[A_k])^2$. L'espressione dell'autocorrelazione del processo $\mathbf{x}(k,t)$ risulta quindi ($\forall\tau$):

$$H_{xx}(\tau) = \sigma_{A_k}^2 \text{tr}\left(\frac{\tau}{4T}\right) + \mu_{A_k}^2$$

Per determinare i valori μ_{A_k} e $\sigma_{A_k}^2$, si considera che A_k è una variabile aleatoria discreta che può assumere solo quattro possibili valori $\{-3,-1,+1,+3\}$, ottenendo così:

$$\mu_{A_k} = E[A_k] = \sum_{i=1}^{4} a_i P(a_i) = (-3)\cdot(0.2) + (-1)\cdot(0.3) + (1)\cdot(0.2), +(3)\cdot(0.3) = 0.2$$

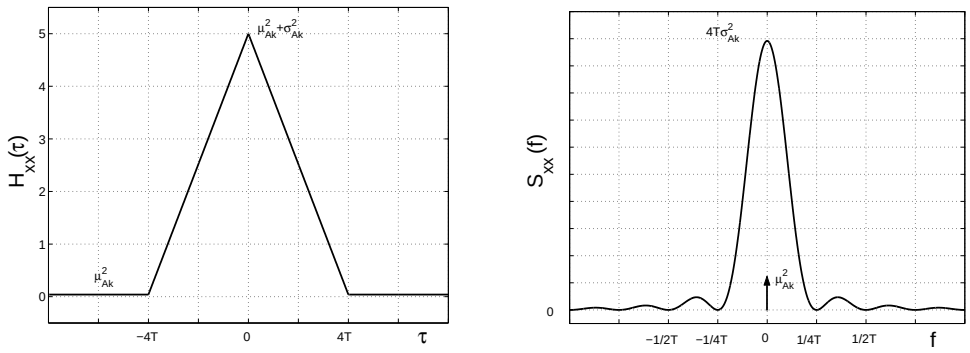
$$E[A_k^2] = \sum_{i=1}^{4} a_i^2 P(a_i) = (-3)^2\cdot(0.2) + (-1)^2\cdot(0.3) + (1)^2\cdot(0.2) + (3)^2\cdot(0.3) = 5$$

$$\sigma_{A_k}^2 = E[A_k^2] - \mu_{A_k}^2 = 4.96$$

L'andamento dell'autocorrelazione è riportato in figura 6.3(a). La densità spettrale di potenza media si calcola come trasformata di Fourier dell'autocorrelazione:

$$S_{xx}(f) = 4T\sigma^2_{A_k}\text{sinc}^2\,(4Tf) + \mu^2_{A_k}\delta(f)$$

il cui andamento grafico è riportato in figura 6.3(b).



(a) (b)

Figura 6.3: (a) Autocorrelazione e (b) densità spettrale di potenza media del processo $\mathbf{x}(k,t)$

Per calcolare la percentuale di potenza contenuta nella componente in continua, è necessario determinare la potenza media del processo e la potenza contenuta nella componente in continua. La potenza media del processo si calcola come l'integrale tra $-\infty$ e $+\infty$ della densità spettrale di potenza media, che corrisponde al valore dell'autocorrelazione in 0: $P_m = \mu^2_{A_k} + \sigma^2_{A_k} = 5$. La potenza contenuta nella componente in continua invece è l'integrale della densità spettrale di potenza media nell'intorno dello 0:

$$P_0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} S_{xx}(f)df = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}[4T\sigma^2_{A_k}\text{sinc}^2\,(4Tf) + \mu^2_{A_k}\delta(f)]df = \mu^2_{A_k}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(f)df = \mu^2_{A_k}$$

La percentuale di potenza contenuta nella componente in continua risulta pertanto:

$$\frac{P_0}{P_m} = \frac{\mu^2_{A_k}}{\mu^2_{A_k} + \sigma^2_{A_k}} = \frac{0.04}{5} = 0.008 = 0.8\%$$